בוחן בשיטות דיפרנציאליות ואינטגרליות 2: 83-114

הערות :

1. משך הבוחן :120 דקות.
2. חומר עזר: מחשבון פשוט.

שאלה 1.

בדוק את ההתכנסות של **<u>ארבעה</u>** מתוך **חמישה** הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 4^n}{3^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7/3)^n \cdot n!}{n^n}$

שאלה 1.

בדוק את ההתכנסות של **<u>ארבעה</u>** מתוך **חמישה** הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

פתרון:

נראה חברות לטור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$$

לכן, כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

ב. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+4^n}{3^n}$

פתרון:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+4^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ מתכנס, ואילו הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ מתבדר, לכן גם הסכום $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+4^n}{3^n}$ מתבדר.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

פתרון:

נגדיר $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ונשווה עם $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(n-n+1)}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

ולכן, כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ מתבדר אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ מתבדר.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$

פתרון:

נסמן $a_n=(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$, נבדוק התכנסות בהחלט:

$$|a_n|=\left|(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}\right|=\frac{\ln n}{n}$$

נשתמש במבחן השוואה הראשון לטורים חיוביים:

$$\forall n\geq 3: 0\leq\frac{1}{n}\leq\frac{\ln n}{n}$$

וידוע כי הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, לכן גם $|a_n|$ מתבדר,ז"א הטור אינו מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי:

זהו טור לייבניץ, כאשר $a_n = \frac{\ln n}{n}$ - סדרה מונוטונית יורדת לאפס ולכן הטור מתכנס בתנאי.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7/3)^n \cdot n!}{n^n}$

פתרון:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(7/3)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(7/3)^n \cdot n!} = ... = \frac{7}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{7}{3e} < 1$$

לכן הטור מתכנס לפי מבחן דלמבר.

שאלה 2.

א. פתח לטור חזקות את $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

ב. חשב את הביטוי $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ בקירוב של אלפית.

פתרון:

א. נפתח תחילה את $\frac{\sin t}{t}$ ואז נבצע אינטגרציה איבר-איבר.

לכל $t \neq 0$:

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

לכן נקבל כי לכל x:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

ב. בסעיף א' קיבלנו כי:

$$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$$

נציב $x=1$ ונקבל:

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-...+r_n(x)$$

כעת, יש לקחת מספיק איברים כך שהשארית בערכה המוחלט תהיה קטנה מדיוק המבוקש.

במקרה שלנו זהו טור לייבניץ שעבורו מתקיים: $\forall n:\left|r_n\right|\le a_{n+1}$, לכן נדרוש:

$\left|r_n\right|\le\frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}<\frac{1}{1000}$, כלומר עבור $n=2$ נקבל את הדיוק הדרוש: $1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}\approx 0.946$

שאלה 3.

א. הוכח שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ מתכנס במ"ש בתחום $(-\infty,\infty)$.

ב. תהי סדרה של פונקציות $f_n(x)=\left\{\frac{nx}{1+n+x}\right\}$, $x\ge 0$.

הוכח שסדרה $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)=x$ במ"ש בתחום $[0,1]$.

פתרון:

א. $\frac{\left|\cos(nx)\right|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ לכל x, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - מתכנס, לכן לפי משפט ווירשטראס טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\cos(nx)\right|}{n^2}$ מתכנס במידה שווה בתחום $(-\infty,\infty)$.

ב.

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\left|\frac{x+x^2}{1+n+x}\right|$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x+x^2}{1+n+x}\right|\le\frac{2}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

ולכן סדרה $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)=x$ במ"ש בתחום $[0,1]$.

הסבר: נסמן $g_n(x)=\frac{x+x^2}{1+n+x}$, זו פונקציה מונוטונית עולה כי:

$$g_n'(x)=\frac{(1+n+x)(1+2x)-(x+x^2)}{(1+n+x)^2}=\frac{x(2n+x+2)+n+1}{(1+n+x)^2}>0$$

לכל $x\in[0,1]$ ולכן הסופרמום שלה **יתקבל בנקודה** $x=1$.

שאלה 4. חשב את רדיוס ההתכנסות של טורי חזקות הבאים וחקור את ההתכנסות בקצוות של תחום ההתכנסות. יש לענות על <u>**ארבעה**</u> מתוך **חמישה** סעיפים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\cdot x^n$

פתרון:

נשתמש בנוסחא של קושי-אדמר :

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$$

אין קצוות.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(2)^{n^2}\cdot x^n$

פתרון:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

אין קצוות.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100\sin n}\cdot x^n$

פתרון:

נשתמש בנוסחאת דלמבר :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+100\sin n}\right)\Big/\left(\frac{1}{(n+1)+100\sin(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)+100\sin(n+1)}{n+100\sin n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+100\frac{\sin(n+1)}{n}}{1+100\frac{\sin n}{n}}=1$$

בקצה $\underline{x=1}$: נקבל טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100\sin n}$ שהוא מתבדר לפי מבחן השוואה עם טור הרמוני.

בקצה $\underline{x=-1}$: נקבל טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100\sin n}(-1)^n$ מתכנס לפי:

נרשום $\frac{1}{n+100\sin n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n+100\sin n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-100\frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$

לכן: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+100\sin n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-100\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$ מתכנס בהחלט לפי מבחני ההשוואה כי:

$$\left|\frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}\right|\le\frac{1}{n(n+100\sin n)}\approx\frac{1}{n^2}$$

לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+100\sin n}$ מתכנס.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$

פתרון:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$. נחליף משתנה $y=\frac{x}{2}$ ונסתכל בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot y^n$

נמצא רדיוס התכנסות : $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right|=1$. מכאן , הטור מתכנס ב- $(-1,1)$.

כאשר $x=1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ - מתבדר כי $\frac{1}{n}\le\frac{n}{n+1}$, $n>1$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

כאשר $x=-1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ - מתבדר כי $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=\pm1\neq0$.

לכן, תחום ההתכנסות הוא $|y|<1 \Leftarrow |x|<2$.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot x^n$

פתרון:

נשתמש בנוסחאת דלמבר : $R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\Big/\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)=1$

בקצה: $\underline{x=1}$ נקבל טור מספרי חיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ אשר מתכנס, כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$ ולכן החל מ n_0 מסוים $\ln n<\sqrt{n}$ ולכן החל מ- n_0 מסויים מתקיים: $\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n^{3/2}}$.

שניהם טורים חיוביים והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס, לכן לפי מבחן השוואה גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ מתכנס.

בקצה: $\underline{x=-1}$: טור מספרי מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

בהצלחה! ☺