<u>דוגמא לשילוש אורתוגונלי של מטריצה</u>

תהי המטריצה $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ נשלש אותה א"ג

- דבר ראשון, נחשב ע"ע: $f_A=(x-1)^2(x-2)^2$, ולכן ע"ע הינם $1,2$.
- נמצא בסיס א"נ של אחד המרחבים העצמיים (עדיף עם ריבוי גיאומטרי הכי גבוה, ולכן מהמרים על זה עם הריבוי האלגברי הכי גבוה. פה זה לא משנה, נתחיל עם 1).

בסיס א"נ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$

- נשלים את הבסיס למרחב העצמי לבסיס א"נ של המרחב כולו ונשים בעמודות מטריצה, כאשר העמודות הראשונות הן הבסיס של המרחב העצמי.

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן $A_1=P^tAP=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \sqrt{2} & \frac{13}{\sqrt{6}} \\ 0 & 5 & -4\sqrt{6} & -\frac{17}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 3 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{6}{\sqrt{3}} & -3 \end{pmatrix}$.

- נמחק את השורה הראשונה, ואת העמודה הראשונה של המטריצה לקבל $[A_1]_{11}=\begin{pmatrix} 5 & -4\sqrt{6} & -\frac{17}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 3 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} & -\frac{6}{\sqrt{3}} & -3 \end{pmatrix}$ ועכשיו אנחנו צריכים לשלש אורתוגונאלית את המטריצה הזו.
- הפולינום האופייני של $[A_1]_{11}$ הוא בהכרח $f_{[A_1]_{11}}=(x-1)(x-2)^2$ (הע"ע שבעזרתו שילשנו ירד כריבוי הגיאומטרי שלו)

- נמשיך עם הע"ע 1, לקבל בסיס א"נ למרחב העצמי של 1; $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{6}{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{pmatrix}$ נשלים לבסיס א"נ

$$A_2 = P_1^t \left[A_1\right]_{11} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{47}{\sqrt{3}\sqrt{7}} \\ 0 & 7 & \frac{25}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ 0 & -\sqrt{14} & -3 \end{pmatrix} \text{ ונקבל } P_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- שוב נמחק את השורה הראשונה, והעמודה הראשונה לקבל $\left[A_2\right]_{11} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{25}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ -\sqrt{14} & -3 \end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני הינו $f_{\left[A_2\right]_{11}} = (x-2)^2$ והע"ע הם 2.

- נחשב בסיס א"נ למרחב העצמי של 2: $\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ נשלים לבסיס א"נ לקבל מטריצה א"ג

$$A_3 = P_2^t \left[A_2\right]_{11} P_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{39}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ כך ש } P_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

- סוף סוף הגענו למטריצה משולשית! נשלים את המטריצות הא"ג להיות בגודל 4×4.

קל לראות שהמטריצות $\widetilde{P}, \widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ א"ג, ולכן $\widetilde{P} = P, \widetilde{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}, \widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 \end{pmatrix}$ גם הכפל שלהן.

- קבלנו לכסון א"ג $Q^t A Q = \left(\widetilde{P}\right)^t \left(\widetilde{P}_1\right)^t \left(\widetilde{P}_2\right)^t A \widetilde{P}_2 \widetilde{P}_1 \widetilde{P}$ כאשר $Q = \widetilde{P}_2 \widetilde{P}_1 \widetilde{P}$.

- נחשב את Q,

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{7}} & \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{7}} & \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{7}} & \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{7}\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

- אכן $$Q^tAQ=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & -\frac{41}{3\sqrt{7}\sqrt{13}} & \frac{85}{3\sqrt{2}\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{13}} & -\frac{389}{3\sqrt{7}\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{39}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$