אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב – תרגיל 1 – קואורדינאטות ומטריצות מעבר בין בסיסים:

1. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 45 והלאה: 9.1; 9.3; 10.5;

9.1:

פתרון:

נסמן $B=\{v_1,\dots,v_n\}$.

א. נניח $v=0_V$ לכן $v=0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_n$ ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

בכיוון ההפוך, אם $[v]_B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ אזי $v=0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_n$ ולכן $v=0_V$.

ב. נניח $[v]_B=[w]_B=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ לכן $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n=w$. הכיוון ההפוך טריוויאלי.

ג. ברור, עבור $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ הוקטור $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n$ מקיים $[v]_B=a$

ד. נסמן $[u]_B=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix},[v]_B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, ולכן $v=b_1v_1+\dots+b_nv_n, u=c_1v_1+\dots+c_nv_n$.

כעת: $[\alpha v+\beta u]_B=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow \alpha v+\beta u=a_1v_1+\dots+a_nv_n\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha(b_1v_1+\dots+b_nv_n)+\beta(c_1v_1+\dots+c_nv_n)=a_1v_1+\dots+a_nv_n$$

ולפי יחידות ההצגה, זה נכון אם"ם $\forall i:\alpha b_i+\beta c_i=\alpha_i$ וזה נכון אם"ם

$\alpha[v]_B+\beta[u]_B=[\alpha v+\beta u]_B$

9.3:

פתרון:

א' גורר ב':

$$[b]_B=[\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n]_B=\alpha_1[v_1]_B+\dots+\alpha_n[v_n]_B$$

לכן $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ פתרון למערכת $Ax=[b]_B$ (לפי ליניארית 1).

ב' גורר ג': טריוויאלי

ג' גורר א': נסמן את הפתרון למערכת $Ax=[b]_B$ ב $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ולכן

$[b]_B=\alpha_1[v_1]_B+...+\alpha_n[v_n]_B=[\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n]_B$ לפי תרגיל קודם

$b=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$

:10.5

פתרון:

א. יהי $v\in V$ וקטור כלשהו. נסמן $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. לכן

$$P[v]_B=\alpha_1[b_1]_S+...+\alpha_n[b_n]_S=[\alpha_1 b_1+...+\alpha_n b_n]_S=[v]_S$$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

ג. מטריצה זו היא ההופכית של הקודמת $[I]_B^S=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

ד. $[I]_S^C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$[I]_B^C=[I]_B^S[I]_S^C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&-1&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

ה. לפי סעיף א', יש להוכיח ש $[I]_C^B=\left([I]_S^C\right)^{-1}[I]_S^B$ אבל זה קל. ידוע ש

$[I]_S^B[v]_B=[v]_S,[I]_S^C[v]_C=[v]_S$ ולכן $[v]_C=\left([I]_S^C\right)^{-1}[v]_S$ ולכן סה"כ

$\left([I]_S^C\right)^{-1}[I]_S^B[v]_B=\left([I]_S^C\right)^{-1}[v]_S=[v]_C$ כפי שרצינו.

ו. לפי סעיף קודם $[I]_C^B=\left([I]_S^C\right)^{-1}[I]_S^B=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&1\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}$

2. יהא V מ"ו ו B בסיס ל V. יהיו $v_1,...,v_n \in V$. הוכח:

a. $v_1,...,v_n$ בת"ל אם"ם $[v_1]_B,...,[v_n]_B$ בת"ל

b. $w \in Span\{v_1,...,v_n\}$ אם"ם $[w]_B \in Span\{[v_1]_B,...,[v_n]_B\}$

א. נסמן את המימד של V ב m. קל לוודא ש $[\ ]_B : V \to F^m$ היא העתקה לינארית לפי הקריטריון המקוצר: נסמן $B=\{u_1,...,u_m\}$ יהיו $v,w \in V$, $\alpha \in F$ כך ש $v = a_1u_1+...+a_nu_n, w = u = b_1u_1+...+b_mu_m$. לכן $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, [w]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. לכן

$v+\alpha w = (a_1+\alpha b_1)u_1+...+(a_m+\alpha b_m)u_m$ כלומר $[v+\alpha w]_B = \begin{pmatrix} a_1+\alpha b_1 \\ \vdots \\ a_m+\alpha b_m \end{pmatrix} = [v]_B + \alpha[w]_B$.

נניח $v_1,...,v_n \in V$ לכן $a_1v_1+...+a_nv_n = 0$ אם"ם $[a_1v_1+...+a_nv_n]_B = 0$ אם"ם $a_1[v_1]_B+...+a_n[v_n]_B = 0$ (כי $[\ ]_B$ העתקה לינארית).

נובע שקיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של $v_1,...,v_n$ שמתאפס אם"ם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של $[v_1]_B,...,[v_n]_B$ שמתאפס.

ב. $w \in Span\{v_1,...,v_n\}$

אם"ם קיימים סקלרים כך ש $w = a_1v_1+...+a_nv_n$

אם"ם קיימים סקלרים כך ש $0 = a_1v_1+...+a_nv_n - w$

אם"ם קיימים סקלרים כך ש $[0]_B = [a_1v_1+...+a_nv_n - w]_B$

אם"ם קיימים סקלרים כך ש $0 = a_1[v_1]_B+...+a_n[v_n]_B - [w]_B$

אם"ם קיימים סקלרים $[w]_B = a_1[v_1]_B+...+a_n[v_n]_B$

אם"ם $[w]_B \in Span\{[v_1]_B,...,[v_n]_B\}$

3. תהי $[I]_C^B$ מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס C. הוכח ש $[I]_C^B$ הפיכה. (רמז-תזכורת: מטריצה ריבועית הפיכה אם"ם עמודותיה בת"ל)

B,C בסיסים לכן $b_1,...,b_n$ בת"ל ולכן לפי שאלה 2 סעיף b גם $[b_1]_C,...,[b_n]_C$ בת"ל. מטריצה ריבועית שעמודותיה בת"ל הינה הפיכה. (המטריצה ריבועית כי מספר האיברים בבסיסים שווה ולכן $[\ ]_C : V \to F^n$ כלומר $[b_i]_C \in F^n$.

נראה שנובע מכך ש $[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}$: המטריצה $[I]_C^B$ הינה המטריצה המקיימת

$\forall v\in V:[I]_C^B[v]_B=[v]_c$. נכפיל בשמאל בשני אגפי המשוואה בהופכית (שהרגע הוכחנו שקיימת)

לקבל $\left([I]_C^B\right)^{-1}[I]_C^B[v]_B=\left([I]_C^B\right)^{-1}[v]_c$ ולכן מתקיים $\forall v\in V:\left([I]_C^B\right)^{-1}[v]_c=[v]_B$ ולכן לפי

הגדרה $\left([I]_C^B\right)^{-1}$ הינה מטריצת המעבר מ C ל B .

4. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$, ויהי בסיס $E=\{1+x,1-x+x^2,x+2x^2\}$ ל V. מצא את:

a. $[2+2x+x^2]_E$

נמצא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי ל E .

$$[I]_E^S=\left([I]_S^E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0.6&0.4&-0.2\\0.4&-0.4&0.2\\-0.2&0.2&0.4\end{pmatrix}$$

לכן $[2+2x+x^2]_E=[I]_E^S\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.8\\0.2\\0.4\end{pmatrix}$

b. $[-2-2x+x^2]_E$

$$[-2-2x+x^2]_E=[I]_E^S\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.2\\0.2\\0.4\end{pmatrix}$$

c. $[x^2]_E$

נשים לב ש $[x^2]_E=\frac{1}{2}[2+2x+x^2]_E+\frac{1}{2}[-2-2x+x^2]_E$

ולכן $[x^2]_E=\begin{pmatrix}-0.2\\0.2\\0.4\end{pmatrix}$

5. יהא $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, ויהי בסיס $E=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ ל V:

a. יהי $u\in V$ כך ש $[u]_E=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$, מצא את u.

$$u=1\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\10&3\end{pmatrix}$$

b. יהי $u\in V$ כך $[u]_E=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$, מצא את $[u]_S$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי)

$$u=a\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-c+2d&a-b+c+d\\a+2b+c+d&c\end{pmatrix}$$ ולכן

$$[u]_S=\begin{pmatrix}a+b-c+2d\\a-b+c+d\\a+2b+c+d\\c\end{pmatrix}$$

c. מצא את $[I]_E^S$

$$[I]_E^S=\left([I]_S^E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&-1&1&1\\1&2&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-3\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\\1&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$$

d. מצא את $\left[\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]_E$

$$\left[\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]_E=\begin{pmatrix}-1&1&1&-3\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\\1&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b+c-3d\\\frac{c-b}{3}\\d\\a-\frac{b+2c}{3}+2d\end{pmatrix}$$