83-110
אלגברה ליניארית
מרצה: יונתן בק
סמסטר א, תשס"ד—מועד א'
8.2.04

לקבלת כל הנקודות הציגו כל העבודה הדרושה בפתרונות. יש לנמק כל החישוב הנדרש לפתרון. חומר עזר אינו מותר. מחשבי כיס מותרים אחרי בדיקה של המרצה. בהצלחה!!

1. [20 נק'] למטריצה ה 4×6 A יש 2 מתחת לאלכסון ו 1 בכל שאר המקומות,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\2&1&1&1&1&1\\2&2&1&1&1&1\\2&2&2&1&1&1\end{bmatrix}.$$

a. על ידי פעולות שורה תמצאו פירוק $A=LU$ כאשר L משולשת תחתון ו U משולשת עליון.
b. מה הצורה המדורגת לחלוטין של A?
c. מצא/י את הדרגה של A ובסיס למרחב המאפס $N(A)$.
d. מה הפתרון הכללי למשוואה המטריצית $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$?

2. [10 נק'] כתוב את המטריצה עם התכונה המבוקשת, או הסבר למה מטריצה כזאת אינה קיימת.

a. מטריצה עם מרחב עמודות $C(A)$ נפרש על ידי $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ומרחב שורות $R(A)$ נפרש על ידי $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.
b. מטריצה עם מאפס $N(A)$ נפרש על ידי $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, כך ש $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ שייך למרחב העמודות $C(A)$, וכך ש $\det(A)=-1$.

3. [20 נק']

a. מצא/י לכסון אורתוגונאלי למטריצה $B=\begin{bmatrix}16 & -4\\ -4 & 1\end{bmatrix}$.

b. מצא/י את הפירוק הספקטראלי למטריצה B.

4. [15 נק']

a. מצא/י את הדטרמיננטה של המטריצה $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

b. מצא/י את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{4,4} & -A\\ I_4 & -I_4\end{bmatrix}$, 8×8, אותו A.

5. [20 נק'] פתרון הLS ל $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{b}$ הוא $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/3\\ -1\end{bmatrix}$.

a. מצא/י את ההטלה $\hat{\mathbf{b}}$ של $\mathbf{b}$ על $C(A)$.

b. המטריצה A מתאימה לבעיית התאמה של ישר לנקודות במישור. צייר/י את הנקודות והגרף של הישר הטוב ביותר דרכם (מבחינת LS).

c. בשימוש תהליך גרם שמידט מצא/י בסיס אורתונורמאלי ל$C(A)$.

6. [15 נק']

a. הוכח שאם $\mathbf{u},\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ הם שני ווקטורים ניצבים שונים מ $\mathbf{0}$ ב $\mathbb{R}^n$, הם בלתי תלויים ליניארית.

b. אם $W=\operatorname{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, ו $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, כתב/י נוסחה עבור $\operatorname{pr}_W \mathbf{x}$.

c. מתי $\mathbf{x}=\operatorname{pr}_W \mathbf{x}$?