

## 88-235 אנליזת פורייה – מועד א'

מרצה: דר' ארז שיינר      משך המבחן: שלוש שעות      חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד  
משקל כל שאלה: 28 נק'      ענו על כל השאלות      כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

$$1. \text{ תהי } f(x) = \frac{\pi}{2} \sin(|x|)$$

$$א. \text{ הוכיחו כי טור הפוריה של } f \text{ הינו } 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \cos(nx)$$

$$(\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(b-a)]) \text{ העזרו בנוסחא}$$

$$ב. \text{ חשבו את הטורים } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \text{ , } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2((-1)^n + 1)}{(n^2 - 1)^2}$$

2. תהי  $f(x) \in E$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  בעלת נגזרת רציפה למקוטעין. יהיו טורי הקוסינוסים והסינוסים של  $f$ :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad , \quad g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$(\cdot b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ כלומר})$$

א. חשבו את  $h(x) + g(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ב. הביעו את טור הסינוסים של  $f(\pi - x)$  באמצעות  $b_n$ .

$$3. \text{ ידוע כי טור הפורייה של } f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \text{ הוא } \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos(nx)$$

א. חשבו את טור הפורייה של  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

$$ב. \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi n(1-4n^2)} \sin(nx) \text{ בקטע } [-\pi, \pi].$$

$$4. \text{ ידוע כי התמרת הפורייה של } f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ היא } F(s) = \frac{1}{2} e^{-|s|}$$

א. חשבו את התמרת הפורייה של  $h(x) = f * f$  (קונבולוציה).

$$ב. \text{ חשבו את } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+(x-y)^2)(1+y^2)} dy$$

(הניחו שזו פונקציה רציפה בעלת נגזרת רציפה ושייכת ל  $G$ ).