# מועד א' – מד"ר – 83-115 – 22/08/23

זמן המבחן: שלוש שעות. חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

מרצים: דר' זהבה צבי, דר' ארז שיינר.

1. מצאו פתרון למד"ר $(e^x+1)y'+1=-ye^x$ המקיים $y(0)=0$.

2. מצאו שני פתרונות למד"ר $(x+xy)y'=\frac{1}{2}$ המקיימים $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$.

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=2e^x$ המקיים $y(0)=2$ וכן $y'(0)=5$.

4. כדור בעל מסה $m=2$ נזרק כלפי מעלה בזמן במהירות של 20 מטר לשנייה.

   הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g=10$ מטר לשנייה בריבוע.

   א. בהנחה שכוח המשיכה הוא הכוח היחיד הפועל על הכדור, חשבו את הזמן בו הכדור יגיע לשיא הגובה.

   ב. בהנחה שבנוסף לכוח המשיכה, כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל המהירות, מה תהיה מהירות הכדור ומה יהיה כיוונה לאחר שנייה אחת?

5. יהי פרמטר חיובי $0<a\in\mathbb{R}$ ונביט במד"ר $y'=y-2axy^3$

   א. עבור אילו ערכי $a$, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר המקיים $y(0)=1$ וכן $y(1)=\frac{1}{2}$.

   ב. עבור אילו ערכי $a$, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר המקיים $y(0)=-1$ וכן $\lim_{x\to-\infty}y(x)=0$.

# <u>נוסחאון מד"ר</u>

## <u>חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:</u>

<u>כתיב דיפרנציאלי</u> – את המד"ר $y' = f(x,y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x,y)dx$

<u>מד"ר פרידה</u> – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$
כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

<u>מד"ר הומוגנית</u> – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z}dz = \ln|x| + C$. נמצא את $z$ ונציב לקבל $y = xz$.
ניתן להציג את $f(x,y)$ כ$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.
במקרה זה $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

<u>מד"ר לינארית מסדר ראשון</u> – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

<u>משוואת ברנולי</u> – יהי $n \neq 0,1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.
נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.
נמצא את $z$ ונחלץ $y = z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

<u>מד"ר מדוייקת</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.
הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x,y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.
שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את $F$ ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx + c(y)\right) = Q$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x,y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ אינו תלוי ב$y$.
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה $y$ המקיימת את המד"ר $y' = f(x,y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big) dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית $f_y$ רציפה בתחום $|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$.
נסמן ב$M$ את החסם של $|f(x,y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי **קיים** פתרון **יחיד** $y$ לבעיית הקושי $y' = f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \le a'$.

## חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t) = y'(t)$ מהירות
3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F = ma$ כאשר $F$ הוא סכום הכוחות, $m$ היא המסה של הגוף, וכן $a$ הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא $mg$ כאשר $m$ היא המסה של הגוף וכן $g$ הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82\ m/sec^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ $k$ מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם $y$ הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

## חלק ג' – מד"ר מסדר גבוה:

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה $y''=f(y,y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p=f(p,y)$.
2. נחפש פונקציה $y$ המקיימת $y'=p(y)$.

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר $n$.
אם $b(x)=0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר $n$ ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0)=b_0, y'(x_0)=b_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים $a_i(x),b(x)$ רציפים בקטע $I$ אזי קיים פתרון יחיד בקטע $I$ המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות –מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר $n$ עם מקדמים רציפים הוא ממימד $n$.

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר $n$ עם מקדמים רציפים, יהיו $y_1,\dots,y_n$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי $y_p$ פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y=y_p+c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

הורונסקיאן – עבור הפוקנציות $y_1,\dots,y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר $n$ עם מקדמים רציפים בקטע $I$, ויהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע $I$.

מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=b(x)$ הוא

$$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

אם $\lambda\in\mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי $k$, אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda=a\pm bi\in\mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי $k$ כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax}\cos(bx),e^{ax}\sin(bx),xe^{ax}\cos(bx),xe^{ax}\sin(bx),\dots,x^{k-1}e^{ax}\cos(bx),x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

<u>שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר $a$ שורש של הפולינום האופייני מריבוי $k$ ננחש פתרון פרטי

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\sin(bx)$$

כאשר $a\pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי $k$ כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}\cos(bx)+x^k(t_0+t_1x+\cdots+t_mx^m)e^{ax}\sin(bx)$$

<u>שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר $n$ עם מקדמים רציפים בקטע $I$:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=b(x)$$

ויהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p=c_1(x)y_1(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל $i$ מתקיים כי

$$c_i'(x)=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן $A_i$ היא המטריצה המתקבלת מ$A$ ע"י החלפת העמודה ה$i$ בעמודה $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(x)\end{pmatrix}$

<u>טורי טיילור</u> –

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר $v_1$ ו"ע עם ע"ע מתאים $\lambda_1$ של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את $x^r$ ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי $k$ של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות $x^r, \ln(x)\, x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי $k$ כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות $x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b\, ln(x)), \ln(x)\, x^a \cos(b\, ln(x)), \ln(x)\, x^a \sin(b\, ln(x)), \dots$
$\dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b\, ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$

## חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

התמרת לפלס - $\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם $y_1, y_2$ רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה $s$- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at}y(t)\right)$$

הזזה של המשתנה $t$- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\left(u(t-a)y(t-a)\right)$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$