חוגי מנה

יהי R חוג. $A \leq R$ תת חבורה חיבורית(נורמלית)
$^{R}/_{A} = \{x + A | x \in R\}$ תת חבורה ביחס לחיבור. נגדיר:

$$(x + A)(y + A) = xy + A$$

$$(x + a)(y + a') - xy \overset{?}{\in} A$$

מתי זה מוגדר היטב?(לא תלוי בנציגים): יהיו $a, a' \in A$. עבור $a \neq 0$ נקבל $xa' \in A$.
עבור $a' \neq 0$ נקבל $ay \in A$. לכן צריך שA יהיה אידיאל.

משפט

נניח $A \lhd R$. אזי $(^{R}/_{A}, +, 0 + A, 1 + A)$ חוג(נקרא חוג המנה של R מעל A)

הומומורפיזם

הגדרה

פונקציה $\varphi : R \to S$ נקראת הומומורפיזם אם

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$\varphi(1_R) = 1_S$$

הערות

- מקבלים $\varphi(0_R) = 0_S$ כי $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
- אפשר להגדיר "הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה" אם מוותרים על האקסיומה השלישית.

נניח ש$\varphi : R \to S$ הומומורפיזם על חוגים בלי יחידה $\neq 0$. נניח שR, S חוגים(עם יחידה)

$$1_S \cdot \varphi(1_R) = \varphi(1_R \cdot 1_R) = \varphi(1_R) \cdot \varphi(1_R)$$

תרגיל

1. נניח שS תחום, אז φ הומ' עם יחידה.
2. אם φ על, אז φ הומ' עם יחידה.

פתרון

1. נניח שS תחום, כלומר אין מחלקי אפס $\Leftarrow 0 = (1)\varphi \cdot ((1)\varphi - 1)$.
[אם $\varphi(1) = 0$ אז $\forall_x \varphi(x) = \varphi(x\cdot 1) = \varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x)\cdot 0 = 0$, כלומר $\varphi = 0$]
מכיוון ש$\varphi \neq 0$, $\varphi(1) \neq 0$ ולכן $\varphi(1_R) = 1_S$
2. יהי $a \in S$. מכיוון שφ על, יש $x \in R$ כך ש$\varphi(x) = a$, ואז

$$\varphi(1)\cdot a = \varphi(1)\cdot\varphi(x) = \varphi(1\cdot x) = \varphi(x) = a$$

וכנ"ל $a\cdot\varphi(1) = a$, לכן $\varphi(1)$ הוא איבר יחידה של S.

הגדרה

יהי $\varphi : R \to S$ הומומורפיזם.

$$\ker\varphi = \{x \in R | \varphi(x) = 0\} \subseteq R$$

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) | x \in R\} \subseteq S$$

- התמונה היא תת חוג
- נניח ש$x \in \ker\varphi$, $y \in R$. אז

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0\cdot\varphi(y) = 0 \Rightarrow xy \in \ker\varphi...$$

לכן $\ker\varphi \lhd R$ - הגרעין הוא תת חבורה נורמלית.

משפט האיזומורפיזם הראשון

לכל הומומורפיזם $\varphi : R \to S$, $R/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

הערה
- הומ' חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם
- חוגים שיש ביניהם איזומורפיזם נקראים א.יזומורפים

הוכחה

נסמן $K = \ker\varphi$. נגדיר $\bar{\varphi} : R/K \to \mathrm{Im}\varphi$ על ידי $\bar{\varphi}(x+K) = \varphi(x)$.
בתורת החבורות הוכחנו ש$\bar{\varphi}$ מוגדר היטב, והוא איזומורפיזם <u>של החבורות האבליות</u> R/K ו$\mathrm{Im}\varphi$.
נשאר לבדוק ש$\bar{\varphi}$ שומר על הכפל:

$$\bar{\varphi}((x+K)(y+K)) = \bar{\varphi}(xy+K) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(x+K)\cdot\bar{\varphi}(y+K)$$

משפט(1.2.24, בחוברת 1.082)

כל אידאל של $M_n\left(R\right)$ הוא מהצורה $M_n\left(A\right)$ כאשר $A \lhd R$, ולכל $A \lhd R$, $M_n\left(A\right) \lhd M_n\left(R\right)$

הערה

לכל m, $m\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$(כל אידאל של $\mathbb{Z}$ הוא כזה)ע

$$\mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$$

דוגמה למשפט האיזומורפיזם הראשון

יהיו $A \lhd R$.

$$\mathrm{M_n(R)}/\mathrm{M_n(A)} \cong M_n\left(\mathrm{R}/\mathrm{A}\right)$$

כדי להוכיח את הטענה, מספיק להגדיר הומומורפיזם על $M_n\left(R\right) \to M_n\left(\mathrm{R}/\mathrm{A}\right)$ שהגרעין שלו הוא $M_n\left(A\right)$. אכן, נגדיר

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11}+A & \cdots & x_{1n}+A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}+A & \cdots & x_{nn}+A \end{pmatrix}$$

$$\ker\varphi = M_n\left(A\right)$$

$$x_{ij} + A = 0 + A \Leftrightarrow x_{ij} \in A$$

דוגמה

$$R = \mathbb{Z}\left[i\right] = \left\{a + bi \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

סגור לחיבור וחיסור ולכפל, לכן זה תת־חוג של $\mathbb{C}$. תת חוג שלו(לא אידאל!) הוא

$$\mathbb{Z} = \left\{a + 0 \cdot i\right\}$$

דוגמה לאידאל של $R = \mathbb{Z}\left[i\right]$:

$$5R = R \cdot 5 = \left\{5x | x \in R\right\} \lhd R$$

$$5=(2+i)(2-i)$$

$$(1-i)R=\{(2-i)x|x\in R\}\lhd R$$

טענה:

$$\mathrm{R}/_{(2-\mathrm{i})\mathrm{R}}\cong\mathbb{Z}_5$$

הוכחה: נגדיר הומומורפיזם $\varphi:R\to\mathbb{Z}_5$ לפי $a+bi\mapsto a+2b\,(\mathrm{mod}\ 5)$ (כי 1 חייב ללכת ל-$1\ \mathrm{mod}\ 5$, ו-$2-i\mapsto 0$ לכן i חייב ללכת ל-$2\ \mathrm{mod}\ 5$)
הפונקציה מוגדרת היטב והיא על. נחשב את הגרעין שלה:

$$\ker\varphi=\{a+bi|a+2b\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 5)\}=$$

$$=\{a+bi|a\equiv -2b\,(\mathrm{mod}\ 5)\}=$$

$$=\{a+bi|a=-2b+5n\}=$$

$$=\{-2b+5n+bi\}=\{-b\,(2-i)+5n\}=$$

$$=(2-i)\{-b+(2+i)\,n|b,n\in\mathbb{Z}\}=(2-i)R$$

תזכורת

משפט האיזומורפיזם הראשון לחבורות אומר שאם $H\leq G$ ו-$N\lhd G$ אזי $\mathrm{H}\cdot\mathrm{N}/_{\mathrm{N}}\cong\mathrm{H}/_{\mathrm{H}\cap\mathrm{N}}$.

אפשר לזכור לפי הציור:

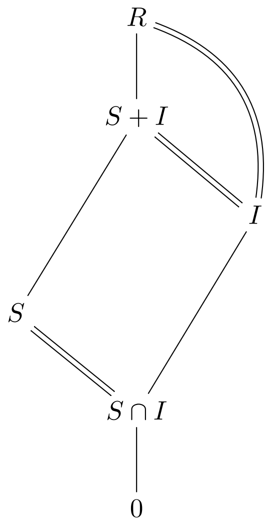
$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, dash] & \\
 & H \cdot N \arrow[dr, dash] \arrow[ddl, dash] & \\
 & & N \arrow[ddl, dash] \\
H \arrow[dr, dash] & & \\
 & H \cap N \arrow[d, dash] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

משפט האיזומורפיזם השני(בחוגים)

R חוג, $S \subseteq R$ תת־חוג, $I \lhd R$ אידיאל

אז:

- $S + I$ תת־חוג של R
- $I \lhd S + I$
- $S \cap I \lhd S$
- ${}^{S+I}/_{I} \cong {}^{S}/_{S \cap I}$



הוכחה

נגדיר הומומורפיזם $S \xrightarrow{\varphi} {}^{S+I}/_{I}$ לפי $a \mapsto a+I$. ברור שזה הומומורפיזם על.

$\ker\varphi = \{a \in S | a+I = 0+I\} = \{a \in S | a \in I\} = S \cap I$

הערה אם $I \subseteq R_0 \subseteq R$, $I \lhd R$ אז כמובן $I \lhd R_0$

דוגמה

$R = \mathbb{Z}(i)$, $S = \mathbb{Z}$, $I = R(2-i)$.

$$\mathbb{Z} = {}^{S}/_{S\cap I} \cong {}^{S+I}/_{I} \subseteq {}^{R}/_{I}$$

$$S \cap I = \mathbb{Z} \cap (2-i)\,\mathbb{Z}(i)$$

$$\mathbb{Z} \ni \overbrace{(2a+b)}^{(2-i)(a+bi)} + i(-a+2b)$$

$$\Updownarrow$$

$$-ab + 2b = 0$$

$$a = 2b \Rightarrow 2a + b = 5b$$

הערה

$$(2-i)\,\mathbb{Z}\,(i)+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\,(i)$$

$$x+yi=(2-i)\,(-y)+(x-2y)$$

משפט האיזומורפיזם השלישי

R חוג, $K \subseteq I \subseteq R$, $K, I \lhd R$:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, bend left] \arrow[dd, dash, bend left=60] \\
I \arrow[d, dash] \\
K
\end{tikzcd}$$

אז:

$$^{I}/_{K} \lhd {}^{R}/_{K}$$

ו־

$$^{R/k}/_{I/K} \cong {}^{R}/_{I}$$

הוכחה

נבנה הומומורפיזם על $\varphi: {}^{R}/_{K} \to {}^{R}/_{I}$ ע"י $x+K \mapsto x+I$ (זהו הומומורפיזם כי $K \subseteq I$)

$$\ker\varphi=\{x+K|x+I=0+I\}=\{x+K|x\in I\}={}^{I}/_{K}$$

דוגמה

$$30\mathbb{Z}\subseteq 6\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$$

$$^{\mathbb{Z}_{30}}/_{6\mathbb{Z}_{30}} = {}^{\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_6$$

הגדרת הומומורפימים

הומומורפיזם נקבע על ידי התמונה של קבוצת יוצרים.

אבל! לא כל בחירת תמונה מגדירה הומומורפיזם!

צריך לבדוק את היחסים בין היוצרים.