פתרון תרגיל בית 1 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. תהא S חבורה למחצה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו $M = S \cup \{e\}$ עם איבר חדש $e \notin S$ כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של S באופן כזה ש-e הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

פתרון. הפעולה החדשה ברורה: לכל $a \in M$ נגדיר כי הכפל עם e הוא $ae = ea = a$.

נראה שהפעולה במבנה החדש נשארת קיבוצית. נתון שאם $a, b, c \in S$, אז מתקיים $a(bc) = (ab)c$. צריך לבדוק מה יקרה אם במשוואה האחרונה נרשה כי a, b, c הם e (אם יותר מאחד מהם הוא e, נשתמש ב-$ee = e$). אם $a = e$, אז

$$e(bc) = bc = (eb)c$$

ואם $b = e$, אז $a(ec) = ac = (ae)c$, ובאופן דומה גם אם $c = e$.

שאלה 2. יהא $M_0 = \{0\}$ מונואיד האפס. תארו את המונואיד המתקבל מחזרה של n פעמים על הבנייה מהשאלה הקודמת. כלומר עבור $i > 1$ נגדיר מונואיד $M_i = M_{i-1} \cup \{e_i\}$ שבו e_i הוא איבר היחידה החדש ואתם מתבקשים לומר כיצד נראה לוח הכפל של M_n.

פתרון. לצורך נוחות נסמן $e_0 = 0$. האיברים במונואיד M_n הם $\{e_0, e_1 \ldots, e_n\}$. כדי לדעת מה היא המכפלה e_ie_j ו-e_je_i, כאשר $i \geq j$, צריך לבדוק מה קורה בחזרה ה-i על הבנייה. נקבל כי $e_ie_j = e_je_i = e_j$. לכן באופן כללי

$$e_ie_j = e_je_i = e_{\min\{i,j\}}$$

ובפרט, הפעולה חילופית.

שאלה 3. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא חבורה למחצה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. $(\mathbb{Z}, *)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ג. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ד. $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ה. $(\mathbb{R}, *)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \sqrt{a + b}$.

ו. תהי X קבוצה. $(P(X), \triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ז. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ח. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ט. הקבוצה הבאה ביחס לכפל מטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

פתרון. לא נציין מפורשות בכל סעיף שאם מבנה אלגברי הוא חבורה, אז הוא גם מונואיד, ולכן גם חבורה למחצה. ולהפך, אם הוא לא חבורה למחצה, אז ודאי שהוא גם לא מונואיד וכו'.

א. מבנה זה הוא חבורה למחצה כי ישנה סגירות והפעולה קיבוצית, שכן מתקיים $(a * b) * c = a + b + c + 4 = a * (b * c)$. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. לא מדובר במונואיד כי אילו היה איבר יחידה, אזי הוא היה -2 שאינו מספר טבעי.

ב. מבנה זה הוא חבורה, בשונה מן הסעיף הקודם. איבר היחידה הוא $e = -2$. האיבר ההופכי של a הוא $-a - 4$. הפעולה חילופית.

ג. הסגירות של הפעולה ברורה. הפעולה קיבוצית כי

$$\max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\}$$

איבר היחידה הוא 1 כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\max\{1, n\} = \max\{n, 1\} = n$. אין הפיך לאף איבר פרט ל-1, ולכן מדובר במונואיד. הפעולה חילופית.

ד. הפעולה סגורה כי כפל של מספרים שלמים זוגיים הוא שלם זוגי. הפעולה קיבוצית כי פעולת הכפל הרגילה של מספרים היא קיבוצית. לא קיים איבר יחידה, שכן אם $a \in 2\mathbb{Z}$ היה איבר יחידה אז יתקיים $2 \cdot a = 2$, ונקבל כי $a = 1 \notin 2\mathbb{Z}$. לכן מבנה זה הוא חבורה למחצה.

ה. הפעולה לא סגורה, למשל $0 * -1 = \sqrt{0 - 1} \notin \mathbb{R}$. גם אילו הקבוצה הייתה $\mathbb{C}$, אפשר לשים לב שהפעולה אינה קיבוצית. לכן $(\mathbb{R}, *)$ אינה חבורה למחצה. הפעולה חילופית.

ו. מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A, B \in P(X)$, אז גם $A \triangle B$ היא תת קבוצה של X. קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

ז. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$$

ולכן לא מדובר בחבורה למחצה. הפעולה חילופית.

ח. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2+b^2>0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

ט. המבנה הזה הוא חבורה שנקראת חבורת הייזנברג הבדידה. סגירות הפעולה היא לא מיידית, כמו בסעיף הקודם, ויש לבדוק כי

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d & f \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+d & c+f+ae \\ 0 & 1 & b+e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

מהמכפלה הזו קל למצוא דוגמאות שמראות שהפעולה לא חילופית (התבוננו בחלק $c+f+ae$). המטריצות ב-H הן תמיד הפיכות. מטריצת היחידה I_3 שייכת ל-H והיא איבר היחידה. נותר לוודא סגירות להופכי, שאפשר לבדוק ישירות:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2b^2$.

פתרון. לכל זוג איברים $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$. נכפיל משמאל ב-$a^{-1}$ ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1} = ba = ab = a^{-1}aabbb^{-1}$$

כלומר $ba = ab$.

שאלה 5. תהי קבוצה $S=\{a,b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S,*)$ היא:

א. חבורה למחצה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

פתרון. א. ניתן שתי אפשרויות (שהן היחידות עד כדי שקילות): הראשונה היא

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

שלעיתים נקראת "חבורה למחצה האפסית" (null semigroup) על שני איברים. השנייה היא

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

שהיא "חבורה למחצה של אפס משמאל" (left zero semigroup), כלומר לכל $x, y \in S$ מתקיים $xy = x$.

ב.

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

זו טבלת הכפל של $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ כאשר $a = 0, b = 1$. זו למעשה גם טבלת האמת של הקשר הלוגי "וגם", כאשר $a = F, b = T$. איבר היחידה הוא b.

ג.

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

במקרה זה a הוא איבר היחידה. האיבר b הוא ההופכי של עצמו. זו בדיוק טבלת הכפל של $(\mathbb{Z}_2, +)$ כאשר $a = 0, b = 1$.

שאלה 6. תהינה שתי חבורות $(G, *)$, $(H, \bullet)$. עבור המכפלה הקרטזית $G \times H$ נגדיר את הפעולה $\cdot$ לפי $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$ עבור כל $g_1, g_2 \in G$ וכל $h_1, h_2 \in H$.
הוכיחו כי $(G \times H, \cdot)$ היא חבורה.

פתרון. יהיו $g_i \in G$ וגם $h_i \in H$ איברים. הסגירות של $G \times H$ נובעת מסגירות הפעולות של G ושל H:

$$g_1 * g_2 \in G, h_1 \bullet h_2 \in H \Longrightarrow (g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2) \in G \times H$$

קיבוציות הפעולה נובעת מקיבוציות הפעולות של G ושל H:

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)) \cdot (g_3, h_3) &= ((g_1 * g_2) * g_3, (h_1 \bullet h_2) \bullet h_3) \\ &= (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \bullet (h_2 \bullet h_3)) \\ &= (g_1, h_1) \cdot ((g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)) \end{aligned}$$

איבר היחידה הוא (e_G, e_H) והאיבר ההופכי של (g, h) הוא (g^{-1}, h^{-1}) שכן:

$$(g, h) \cdot (g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1}, h \bullet h^{-1}) = (e_G, e_H) = (g^{-1} * g, h^{-1} \bullet h) = (g^{-1}, h^{-1}) \cdot (g, h)$$

שאלה 7 (אתגר)**.** הוכיחו שאם בחבורה למחצה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש-$c = xa$, ואז $ce = xae = xa = c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

פתרון. נשתמש ברמז, ולפי הנחה יש פתרון למשוואה $ax = a$. נניח כי e הוא פתרון (התלוי ב-a). נשים לב כי לכל $c \in S$ מתקיים כי קיים פתרון x למשוואה $xa = c$. לכן

$$ce = (xa)e = x(ae) = xa = c$$

וקיבלנו כי e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש פתרון e' למשוואה $xa = a$. לכל $c \in S$ קיים פתרון x למשוואה $ax = c$, ומתקיים כי

$$e'c = e'(ax) = (e'a)x = ax = c$$

ולכן e' יחידה משמאל. אבל אם קיימים איברי יחידה מימין ומשמאל, אז יש איבר יחידה יחיד. נסמן אותו ב-e. לפי הנתון יש פתרון למשוואות $cx = e$ ו-$xc = e$, כלומר קיים הופכי משמאל ומימין לכל איבר $c \in S$. לכן כל איבר $c \in S$ הוא הפיך.

בהצלחה!