תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1. נסמן ב-abc את שלוש הספרות הראשונות של מספר הת"ז שלכם וב-yz את שתי הספרות האחרונות.

מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס המורחב את $\gcd(abc, yz+12)$ ואת מקדמי הצירוף הלינארי שלהם ששווה לו.

שאלה 2. רמז: אלגוריתם אוקלידס עובד גם עם פרמטרים.

א. הוכיחו שלכל n שלם מתקיים $(4n+3, 7n+5) = 1$.

ב. מצאו $s, t \in \mathbb{Z}$ (ואולי תלויים ב-n) כך ש-$(4n+3)s + (7n+5)t = 1$.

שאלה 3. חשבו בעזרת חבורת אוילר ומשפט אוילר את הסעיפים הבאים:

א. שתי הספרות האחרונות של המספר $89^{3602} + 5783^{4121}$.

ב. $118^{287} \pmod{95}$.

שאלה 4. הוכיחו כי אם m, n שלמים חיוביים אז $(m^2, m+n) = (n^2, m+n)$.

שאלה 5. רמז: המספר $\varphi(n)$ הוא סדר של חבורה מוכרת.

א. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ שלם המספר $\varphi(n)$ זוגי.

ב. הוכיחו שלכל $m, s > 1$ טבעיים מתקיים כי $m | \varphi(s^m - 1)$.

שאלה 6. בחבורה A_9, מצאו איברים מהסדרים $4, 6, 7, 8, 10, 12, 14$ או שהוכיחו שלא קיים איבר כזה.

שאלה 7. נתונים שלמים חיוביים a, b, c כך ש-$a \mid c$, $b \mid c$ וגם $(a, b) = 1$. הוכיחו כי $ab \mid c$.

שאלה 8 (תכנות)**.** פתרו את בעיה 5 מפרוייקט אוילר: המספר 2520 הוא המספר הקטן ביותר שהחלוקה שלו בכל אחד מן המספרים מ-1 עד ל-10 היא ללא שארית.
מה הוא המספר החיובי הקטן ביותר שמתחלק ללא שארית בכל המספרים מ-1 עד ל-20?
הסבירו אם השיטה שלכם תעבוד בזמן סביר (פחות מדקה) גם למספרים מ-1 עד ל-100.

שאלה 9 (רשות, חבורת התמורות בטלוויזיה)**.** צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תנו דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.

רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!