תרגיל בית 8 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ט"ו טבת ה'תשע"ו, 27.12.2015.

שאלה 1. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של H ביחס ב-G להיות

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H) \leq G$.

ב. הוכיחו כי $H \lhd N_G(H)$.

ג. הסבירו מדוע $N_G(H)$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית. הסיקו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

שאלה 2. תהי G חבורה. עבור איבר $a \in G$ נגדיר את המְרַכֵּז של a להיות

$$C_G(a) = \{g \in G | ga = ag\}$$

א. הוכיחו כי $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_G(a)$.

ב. הוכיחו כי $C_G(a) \leq G$. הסיקו כי $Z(G) \leq G$ (כלומר בלי להוכיח ישירות ש-$Z(G)$ תת־חבורה).

ג. מצאו חבורה G ואיבר $a \in G$ כך ש-$\langle a \rangle \lneq C_G(a) \lneq G$. האם ניתן למצוא חבורה G ואיבר $a \in G$ כך ש-$C_G(a) \lneq N_G(\langle a \rangle)$? (הסימון $\lneq$ משמעו תת־חבורות המוכלות ממש.)

שאלה 3. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{5}$ ו-$\frac{3}{14}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

שאלה 4. תהי G חבורה. הפריכו בעזרת דוגמאות נגד את הטענות השגויות הבאות:

1. אם $N, K \lhd G$ וגם $N \cong K$, אז ${}^{G}/_{N} \cong {}^{G}/_{K}$.
2. אם $N \lhd G$ וגם ${}^{G}/_{N} \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.
3. אם $H \leq G$, אז $Z(H) \lhd G$.

4. אם $H, K \leq G$, אז גם $HK \leq G$.

5. אם $N \lhd G$ אבלית וגם G/N אבלית, אז G אבלית.

שאלה 5. תהי G חבורה, ותהי $N \lhd G$.

א. תהי $H \leq G$. הוכיחו כי $N \cap H \lhd H$.

ב. הוכיחו כי $Z(N) \lhd G$. שימו לב כי שברור ש-$Z(N) \lhd N$, אבל כאן צריך להראות נורמליות בתוך G.

שאלה 6. יהי הומומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{12}$. רמז כללי: משפט האיזומורפיזם הראשון.

א. הוכיחו כי $|\operatorname{im} f| \in \{1, 3\}$.

ב. לכל אחת מהאפשרויות בסעיף הקודם ענו האם f הוא מונומורפיזם? האם הוא אפימורפיזם?

ג. נסמן $K = \ker f$. האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_3$? האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_4$? האם יתכן כי $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$? בכל פעם שקבעתם שכן, מצאו דוגמה של f ושל K באופן מפורש.

בהצלחה!