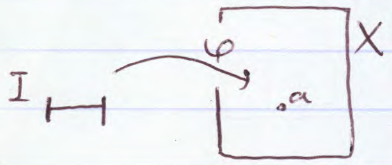
טופולוגיה
אלגברית
2 Shira Gilat

הרצאה 1 - 14/3/12

חבורות הומוטופיה (- לא העיסוק המרכזי בקורס. קשות לחישוב)

למדנו על החבורה היסודית $\pi_1(X,a)$:

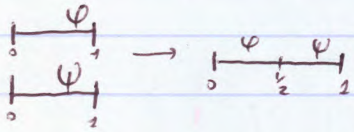
איבריה הם מחלקות שקילות הומוטופיה של המסילות



$\varphi: I \to X$

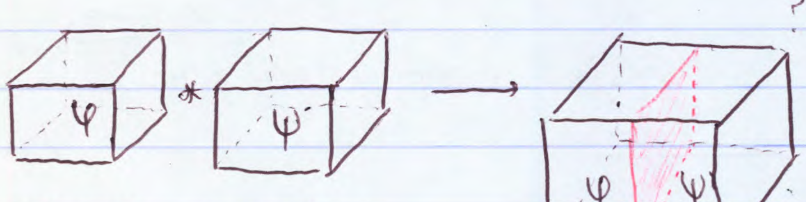
כאשר $\varphi(\partial I)=a$

כפל של φ,ψ הוא שרשור: $[\varphi]\cdot[\psi]=[\varphi*\psi]$



כיוון שקצוות הקטע תמיד מועתקות לנק' בודדת (נק' הבסיס)
ניתן לחשוב על זה באופן שקול גם כהעתקה ממעגל $\varphi: S^1\to X$
עם נק' בסיס כלשהי שעוברת לנק' בסיס: $\varphi(*)=a$
למה הגדרנו מלכתחילה כקטעים? יותר נח להגדרת הכפל כשרשור.

הכללה טבעית: חבורות ההומוטופיה $\pi_n(X,a)$
הן מחלקות שקילות של הומוטופיות $S^n \xrightarrow{\varphi} (X,a)$
או באופן שקול $I^n \xrightarrow{\varphi} (X,a)$
$\varphi(\partial I^n)=\{a\}$
(שם לב ש I^n כאשר מזהים את ∂I^n שקול ל S^n)
איך מוגדר הכפל?



(בוחרים כיוון/דופן)

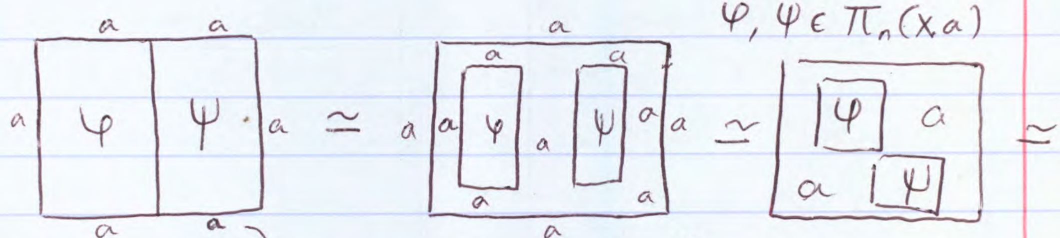
(*) $\pi_0(X,a)$ - איבריה העתקות מנקודה למ"ט (השפה ריקה, ולדופנות אין משמעות)
זו לא חבורה! איבריה נמצאים בהתאמה חח"ע עם מרכיבי הקשירות המסילתית של X. (כי העתקה מנק' למרחב שקול לבחירת נק' מהמרחב ונק' שקולות אם יש מסילה ביניהם)

$\pi_n(X,a)$ זו חבורה (הוכחה ממש כמו עבור החבורה היסודית)

<u>טענה</u> עבור $n\geq 2$, $\pi_n(X,a)$ אבלית

<u>הוכחה</u>

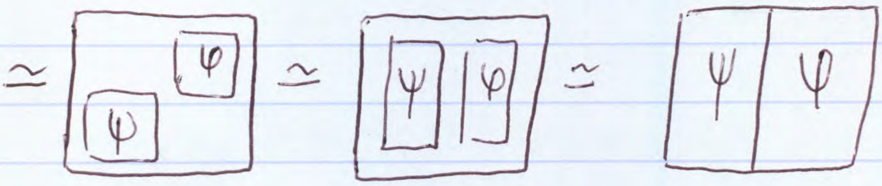
$\varphi,\psi\in\pi_n(X,a)$

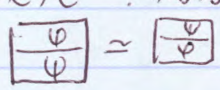
$\varphi*\psi=$ 

ערכם של φ,ψ קבוע על השפה

עושים כיווץ. φ,ψ מוגדרים על מלבנים קטנים יותר (הכל קורה מהר יותר)

התחום הנותר של I^n קבוע על a

 $=\psi*\varphi$

(זה לא תלוי בהגדרה של השרשור. גם אם השרשור היה בכיוון אחר הייתה קומוטטיביות )

עד כאן חבורות הומוטופיה

<u>חבורות הומולוגיה $H_n(X)$</u>

אנו מדברים בתוך הקטגוריה של חבורות <u>אבליות</u>

גם פה יש לנו מושג של חבורה חופשית:

<u>בנייה</u>

אנחנו מחפשים אובייקט אוניברסלי

<u>קבוצות</u> <u>חבורות אבליות</u>

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & G \\ & U \arrow[ur, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

הומומ' של חבורות אבליות

בהינתן קבוצה S

מחפשים חבורה אבלית U והעתקה $h:S\to U$

כך שלכל חבורה אבלית G והעתקה $f:S\to G$

קיים הומומורפיזם יחיד $L:U\to G$ כך ש $f=L\circ h$.

האוביקט שמקיים באמת הינו..

הגדרה חבורה אבלית חופשית על קב' S

$$FA(S) = \Big\{ \underset{\text{סכום סופי פורמלי}}{\sum} n_i s_i \ : \ n_i \text{ מספרים שלמים} \ \ s_i \in S \Big\}$$

↳ free abelian group

למשל

$S =$ 

$7\,\text{תפוח} - 3\,\text{בננה} \in FA(S)$

חיבור $(7\,\text{תפוח} - 3\,\text{בננה}) + (10\,\text{בננה} + 20\,\text{אגס}) = 7\,\text{תפוח} + 7\,\text{בננה} + 20\,\text{אגס}$

⊛ S יכולה להיות אינסופית, אבל כל מילה (איבר ב $FA(S)$) הינו סכום **סופי**

⊛ אפס הינו $0\cdot\text{תפוח} + 0\cdot\text{בננה} + 0\cdot\text{אגס} = 0$, אפשר שלא לרשום בכלל איברים עם מקדם אפס.

⇐ נראה ש $U = FA(S)$: (לומר שהינו האוביקט האוניברסלי שרצינו)

נניח נתון $f: S \to G$

אזי מושרה הומומורפיזם $\hat{f}: FA(S) \to G$

$$\hat{f}\Big(\underset{\text{סכום פורמלי סופי}}{\sum n_i s_i}\Big) = \sum n_i \cdot \underset{\in G}{f(s_i)}$$

כפל של מספר טבעי באיבר בחבורה

$n\cdot x$ זה חיבור האיבר של החבורה לעצמו n פעמים

$-n\cdot x$ זה חיבור הנגדי $(-x)$ לעצמו n פעמים

← יש שיכון

$$h: S \longrightarrow FA(S)$$
$$s_i \longmapsto 1\cdot s_i$$

כך S הינו תת קבוצה של $FA(S)$, במובן זה, איברי S הם **יוצרים** של החבורה $FA(S)$. ולכן ברור ש $\hat{f}$ הנ"ל זו ההרחבה ה**יחידה** האפשרית (כי יש אילוץ על היוצרים: $f(s_i) = \hat{f}\circ h(s_i)$)

← אנחנו נתקל בחבורות חופשיות שנוצרות סופית וכאלו שנוצרות אינסופית. תמיד נתאר רק ~~[illegible]~~ שנוצרות ע"י אינסוף יוצרים.

14/3/12

הגדרה נסמן ב Δ^n את הסימפלקס ה n-ממדי

כלומר:

$$\Delta^n := \left\{ (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; x_i \geq 0 \,,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

דוגמאות

$\Delta^0 = \{1\}$ נקודה בודדת

$\Delta^1 =$ קטע

$\Delta^2 =$ משולש

$\Delta^3 =$ טטראדר

* $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ אבל Δ^n משוכן ב $\mathbb{R}^n$
* במעשה, $\Delta^n \cong D^n$ (הומאומורפים!)

* Δ^n היא הקמור (convex hull) של וקטורי הבסיס של $\mathbb{R}^{n+1}$ (שהם $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ במקום ה-i)

קמור = קומבינציות $\sum a_i v_i$ של וקטורים מקב' כך ש $\sum a_i = 1$, $a_i \geq 0$

זהו הקב' הקמורה המינימלית שמכילה את קב' הוקטורים

מה המטרה? הסימפלקס שווה ערך טופולוגית (הוא בעצם D^n) אבל זה יעזור להגדיר העתקות בהמשך.

הערה: אצלנו $0 \in \mathbb{N}$

14/3/12

<u>בנייה</u>: נתון מ"ט X.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר <u>הקבוצה</u>

$$S_n(X) := \{\sigma : \Delta^n \to X\}$$

תמיד העתקות רציפות

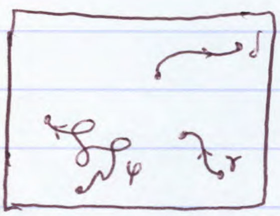
(אצלנו סימון כזה תמיד יסמל העתקות רציפות)

ונגדיר <u>חבורה אבלית</u> $C_n(X) := FA(S_n(X))$

איברי החבורה הם סכומים פורמליים $\sum_{\text{סופי}} n_i\sigma_i$ כאשר σ_i העתקה רציפה מ Δ^n ל X.

<u>להמחשה</u>: דוגמא של איבר ב $C_1(X)$

Δ^1 הוא קטע ולכן על איברי S_n ניתן לחשוב כמסלולים ב X



$$7\ell - 3\gamma + 15\varphi \in C_1(X)$$

(כשהתחלנו להגדיר חב' יסודית, הסתכלנו על אותם מסלולים ביחס לנק' בסיס
אז הגדרנו מחלקות הומוטופיה והכפל היה שרשור מסלולים.
פה אין נק' בסיס והחיבור הוא בסה"כ פורמלי)
...מצד שני ב $C_n(X)$ יש אינפורמציה מאוד מוגבלת על המרחב.

⇐ <u>נגדיר העתקות</u>:

עבור $0\le i\le n$ נגדיר העתקות $\tau_i^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ $(\tau_i =)$

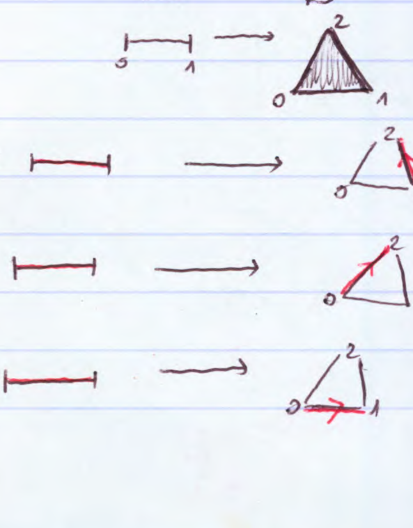
ע"י $\tau_i^n((x_0,\dots,x_{n-1})) = (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$

המקום ה-i המקום ה-$i+1$

זוהי העתקה לינארית.

<u>נדגים</u>: $\tau_0^2, \tau_1^2, \tau_2^2$

אלו הן העתקות $\Delta^1 \to \Delta^2$



τ_0^2 :

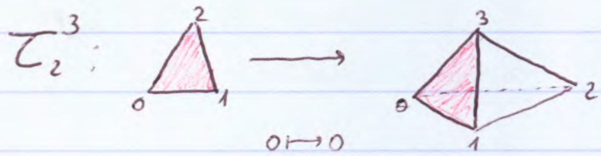
τ_1^2

τ_2^2

14/3/12

6/9

$\tau_2^3:$



$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 3$

(שיכון לינארי לדפן)

זהו שיכון שמעתיק קודקודים לקודקודים לפי הסדר תוך דילוג על הקודקוד ה-i.

- איברי S_n נקראים: סימפלקסים סינגולרים n-ממדיים

(שים לב: סימפלקס זה מרחב
סימפלקס סינגולרי זה העתקה)

- איברי C_n נקראים: שרשראות n-מימדיות (chain)

בניה נגדיר הומומורפיזם:
העתקת שפה $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$

כזכור, כדי להגדיר הומומ' על חבורה אבלית חופשית
מספיק לתאר לאן הולכים איברי הבסיס: היוצרים

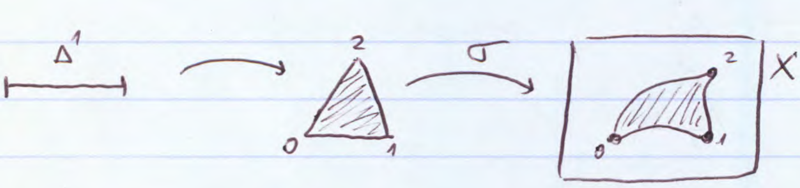
אם כן, עבור סימפלקס סינגולרי n-מימדי σ נגדיר:

$$\boxed{\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \tau_i^n}$$

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{\tau_i^n} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$$

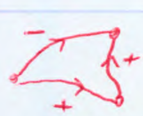
נשים לב שההרכבה אכן סימפלקס סינגולרי n-1 מימדי
ולכן $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \tau_i^n \in C_{n-1}(X)$

דוגמא $\partial_2(\sigma)$



$$\partial_2(\sigma) = \sigma \circ \tau_0 - \sigma \circ \tau_1 + \sigma \circ \tau_2 \in C_1(X)$$

סה"כ:

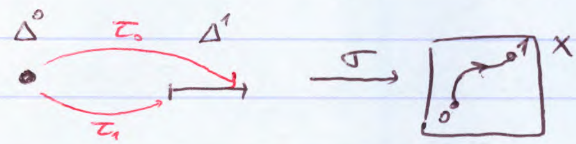


סכום פורמלי שמבטא את השפה
ויחד עם הסימנים זה מבטא גם אוריינטציה
על השפה (כמובן)

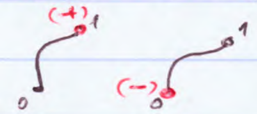
14/3/12

7/9

דוגמא $\partial_1(\sigma)$ $\quad \partial_1 : C_1(X) \to C_0(X)$



$$\partial_1(\sigma) = \sigma\circ\tau_0 - \sigma\circ\tau_1 \in C_0(X)$$



משפט $\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] \\
C_n(X) \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[dd, bend left, "0"] \\
C_{n-1}(X) \arrow[d, "\partial_{n-1}"] \\
C_{n-2}(X) \arrow[d] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

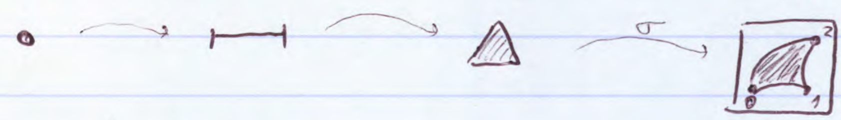
$$\partial_{n-1}\circ\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-2}(X)$$

למעשה זה אומר שכל הרכבה של העתקות שפה עוקבות היא אפס. (העתקת האפס).

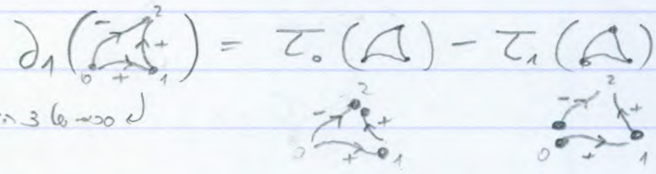
הוכחה מספיק להראות שההעתקה היא אפס על היוצרים.

ראשית נבדוק ש $\partial_1\circ\partial_2=0$:

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2 \xrightarrow{\sigma} X$$



כל קודקוד ניתן פעם בסימן + ופעם בסימן -
(לפעמים בעקבות ∂_1 ולפעמים בעקבות ∂_2) ולכן סה"כ נקבל אפס.



$$= (+2-2+1)-(+1-0+0) = 0$$

כל סימן של 3 האיברים מתאים לX

באופן כללי: $\partial_{n-1}\circ\partial_n(\sigma) = \sum\left(\Delta^{n-2}\xrightarrow{\tau_j^{n-1}}\Delta^{n-1}\xrightarrow{\tau_i^n}\Delta^n\xrightarrow{\sigma}X\right)$

$$\partial_{n-1}\circ\partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ\tau_i^n\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^i(-1)^j\sigma\circ\tau_i^n\circ\tau_j^{n-1}$$

מס' מחוברים: $\overrightarrow{n(n-1)}$ (נשים לב שזה אכן מס' זוגי)

14/3/12

נסמן: $\tau_i^n = [0,1,\dots,\hat{i},\dots,n]$ (דילוג על קודקוד i)

$\tau_i^n \tau_j^{n-1} : \Delta^{n-2} \to \Delta^n$ משכנת באופן לינארי ושומר סדר, תוך דילוג על 2 קודקודים.

$$\Delta^{n-2} \xrightarrow{\tau_j^{n-1}} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\tau_i^n} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$$

כדי להבין את ההעתקה, יש לדעת אילו 2 קודקודים נזרקו:

כידוע: $\sigma \circ \tau_i^n = \sigma[0,1,\dots,\hat{i},\dots,n]$

לגבי $\sigma\tau_i^n\tau_j^{n-1}$ יש 2 אפשרויות:

<u>$j<i$</u>: $\sigma\tau_i^n\tau_j^{n-1} = \sigma[0,1,\dots,\hat{j},\dots,\hat{i},\dots,n]$

<u>$j \geq i$</u>: $\sigma\tau_i^n\tau_j^{n-1} = \sigma[0,1,\dots,\hat{i},\dots,\widehat{j+1},\dots,n]$

אם כן בכל מחובר של $\partial_n\partial_{n-1}(\sigma)$ יש ביטוי מהצורה $\sigma[0,\dots,\hat{k},\dots,\hat{l},\dots,n]$ וכל ביטוי כזה מופיע פעמיים:

פעם עבור $\sigma\tau_k^n\tau_k^{n-1}$ עם סימן $(-1)^{k+l}$

ופעם עבור $\sigma\tau_l^n\tau_k^{n-1}$ עם סימן $(-1)^{k+l-1}$

← ולכן הם מצמצמים!

כלומר: הסכום $\partial_n\partial_n(\sigma)$ הוא סכום של צמד דילוגים כל זוג מופיע פעמיים בסכום עם סימנים הפוכים

← נשים לב שהשמירה על הסדר של הקודקודים מבטיחה שזה יוצא בדיוק אותה ההעתקה (עם סימנים הפוכים).

—מ.ש.ל—

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ זה שקול לומר ש $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\partial_n$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ C_{n+1}(X) \\ \downarrow \partial_{n+1} \\ C_n(X) \\ \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) \\ \downarrow \partial_{n-1} \\ \vdots \\ \downarrow \\ C_0(X) \end{array}$$

נסמן:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Im}\partial_{n+1} & \subseteq & \operatorname{Ker}\partial_n & \subseteq & C_n(X) \\ \| & & \| & & \\ B_n(X) & & Z_n(X) & & \end{array}$$

← איברי $Z_n(X)$ נקראים <u>מחזורים</u> n-מימדיים

← איברי $B_n(X)$ נקראים <u>שפות</u> n-ממדיות

$(x_0,\dots,x_{n-2}) \xmapsto{\tau_j} (\dots x_{j-1},0,x_j,\dots) \xmapsto{\tau_i} (\dots x_{j-1},0,x_j,\dots,x_{i-2},0,x_{i-1},\dots)$: $j<i$

$\xmapsto{\tau_i} (\dots x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots)$: $j \geq i$

14/3/12

9/9

הגדרה חבורת ההומולוגיה ה n-מימדית של X

$$H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \quad \left(= \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}}\right)$$

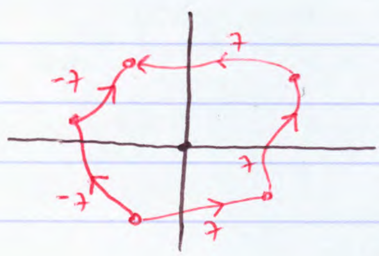
מחזורים מודולו שפות.

על חב' זו נדבר כל הקורס. ונבין מה בדיוק הקשר שלה לטופו' של המרחב X.

דוגמא קצת $H_1(\mathbb{R}^2-\{0\})$

נתבונן במעבר הבא

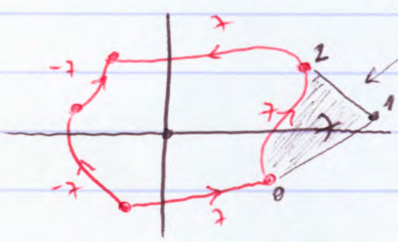
זה מחזור

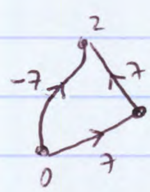


(קל לראות שכל קודקוד מופיע פעמיים

עם מקדם +7 ופעם עם -7 ולכן מתבטל)

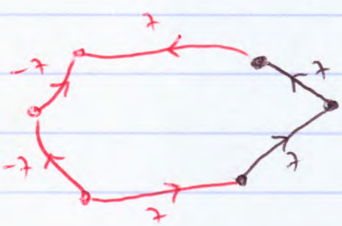
נוסיף לו שפה: $\partial_1(7\Delta)$





השפה של הסימפלקס:

הצלעות 0-2 מתבטלות ומתקבל מחזור חדש:



אבל אלו אברים באותה מחלקה ב $H_1(\mathbb{R}^2-\{0\})$!

אומרים שהם שרשראות הומולוגיות (שייכים לאותה מחלקת הומולוגיה)

(שניהם למעשה סובבו 7 פעמים סביב הראשית)

$\Leftarrow$ 2 שרשראות הם **הומולוגיים** אם ההפרש ביניהם הוא שפה.

בהמשך, נראה קשרים בין הומולוגיה להומוטופיה אבל רואים שזה

דברים שונים מאוד.

ועוד נראה ש H_n זה פנקטור.

14/3/12

למעשה, באופן כללי:

קומפלקס שרשראות:

(A_i - אובייקטים אלגבריים.)

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ A_n \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_n} \\ A_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_{n-1}} \\ \vdots \\ \downarrow \\ A_0 \end{array}$$

אם ט הרכבה של 2 עוקבים תשו אפס

אז זה נקרא שרשרת מדויקת.

ובזה מתעסקים באלגברה הומולוגית.

1/11

הרצאה 2 - 21/3/12

ראינו מבנה: $\cdots \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_0 \xrightarrow{\partial} 0$

מכלילים למבנה אלגברי: **קומפלקס שרשראות**

A קומפלקס שרשראות הוא אוסף חבורות אבליות עם הומומ' ביניהם

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_1} A_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

כך ש $\partial^2 = 0$

חבורת ההומולוגיה של A היא: $H_n(A) = \dfrac{\operatorname{Ker}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}$

[זהו תחום באלגברה שנקרא אלגברה הומולוגית. היסטורית בא אחרי הפיתוח בטופולוגיה אלגברית]

דוגמת קטגוריה — אוביקט: סדרה (אינסופית) של חבורות אבליות והומומ' ביניהם

מורפיזם: סדרה של מורפיזמים $A_n \xrightarrow{f_n} B_n$

כך שהמלבנים מתחלפים, כלומר:

$\boxed{\text{לכל } n:\quad \partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed] & B \arrow[d, dashed] \\
A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] \\
A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & B_n \arrow[d, "\partial'_n"] \\
A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

סדרת העתקות כזאת נקראת:

העתקת שרשראות

(העתקת שרשראות זה לא העתקה אחת אלא אוסף).

~~העתקת שרשראות משרה העתקה של ההומולוגיה.~~

טענה

(א) $f_n(\operatorname{Ker}\partial_n) \subseteq \operatorname{Ker}\partial'_n$

(ב) $f_n(\operatorname{Im}\partial_{n+1}) \subseteq \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$

כלומר: f_n מעתיקה מחזורים למחזורים ושפות לשפות

הוכחה

(א) נניח $z \in Z_n$ צ"ל: $f_n(z) \in Z'_n$

במילים אחרות: אם $\partial z = 0$ אז $\partial'(f(z)) = 0$

אכן $\partial' \circ f(z) \underset{\text{התחלפות הדיאגרמה}}{=} f \circ \partial(z) = f(0) = 0$

(ב) יש להראות ששפה הולכת לשפה:

$$f_n(\underbrace{\partial_{n+1}(a)}_{\in \operatorname{Im}\partial_{n+1}}) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(a)) \in \operatorname{Im}\partial'_{n+1}$$

21/3/12

2/11

⇐ ולכן f_n משרה הומו' על ההומולוגיות (רא' המנה)
$H_n(A) \to H_n(B)$

⇐ בכך ראינו שהומולוגיה היא <u>פונקטור</u> מקטגוריה
של קומפלקסי שרשראות והעתקות שרשראות על קטגוריה
של חבורות אבליות והומו'.

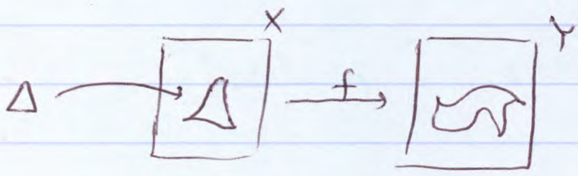
<u>טענה</u> יהיו X,Y מ"ט. $f: X \to Y$ משרה העתקת שרשראות
על קומפלקס השרשראות המתאים:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_n(X) & & C_n(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{n-1}(X) & & C_{n-1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

<u>ע"י</u> $$f_\#: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$$

$$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma \qquad \forall \sigma \in C_n(X)$$

- זוהי הגדרה על איברי הבסיס $\sigma \in S_n(X)$
- כך יוצא שסימפלקס סינגולרי עובר לסימפלקס סינגולרי ולא לסכום פורמלי של כאלו.



<u>הוכחה</u> נוכיח ש $f_\#$ העתקת שרשראות
נראה שהדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

מתחלפת.

מספיק להראות שמתחלף על קב' איברי הבסיס:

$$f_\# \circ \partial(\sigma) = f_\#\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma \circ \tau_i^n\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_\#(\sigma \circ \tau_i^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f \circ (\sigma \circ \tau_i^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i (f \circ \sigma) \circ \tau_i^n = \partial(f \circ \sigma) = \partial \circ f_\#(\sigma)$$

■

⇐ בכך ראינו שהבניה שלנו הינו <u>פונקטור</u> נוסף מקטגוריה של מ"ט והעתקות רציפות לקטגוריה של קומפלקס שרשראות והעתקות שרשראות.

<u>סכ"ה</u> ראינו 2 פונקטורים

(1) מ"ט, העתקות רציפות ⟶ קומפלקס שרשראות, העתקות שרשראות

$$X \longmapsto \{C_n(X)\}$$
$$f \longmapsto \{f_\#\}$$

(2) קומפלקס שרשראות, העתקות שרשראות ⟶ חבורות אבליות, הומומורפיזם

$$A \longmapsto H_n(A)$$
$$f_n \longmapsto \bar{f}_n \text{ (של חבורות מנה)}$$

נרכיב את 2 הפונקטורים: נקבל פונקטור ממ"ט לחבורות אבליות

$$X \longmapsto \{C_n(X)\} \longmapsto H_n(X)$$
$$f \longmapsto f_\# \longmapsto f_*$$

← כעת, נרצה <u>לחשב את ההומולוגיה</u> של מרחב טופולוגי הכי קל בעולם: נקודה בודדת $X = \{p\}$

(וזהו כל הנראה המרחב <u>היחיד</u> שניתן לחשב את ההומולוגיה שלו ישירות מההגדרה)

$$S_n(\{p\}) = \{\Delta^n \longrightarrow \{p\}\} = \{k_p\}$$

יש רק העתקה $\Delta^n \to \{p\}$ אחת והיא k_p (העתקה קבועה ל-p)

$$C_n(\{p\}) = FA(S_n(\{p\})) = FA(\{k_p\}) \cong \mathbb{Z}$$

חבורה אבלית חופשית של איבר יחיד

ולכן קיבלנו:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \cdots$$

נברר מהם העתקות השפה...

21/3/12

4/11

∂K_n

נסמן $S_n(X)=\{K_n\}$

$$\partial K_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i K_n\circ\tau_i^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i K_{n-1} = \begin{cases} K_{n-1} & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ קיבלנו:

$$\partial_{2n} = Id$$
$$\partial_{2n+1} = 0$$

$\Leftarrow$

$$H_{2n}(\{p\}) = \frac{\ker Id}{Im\, 0} = 0/0 = 0$$

$$H_{2n+1}(\{p\}) = \frac{\ker 0}{Im\, Id} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$$

יוצא דופן בסוף השרשרת $\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$, $\partial_0 = 0$

$$H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$$

סה"כ

$$\boxed{H_n(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}}$$

משפט (א) אם X קשיר מסילתית אז $H_0(X)=\mathbb{Z}$

(ב) אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הם מרכיבי הקשירות המסילתיים של X אז לכל n:

$$H_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_n(A_\alpha)$$

הערה לפי (א)+(ב) H_0 תמיד חבורה חופשית כשיש התאמה (חח"ע ועל) בין רכיבי הקשירות המסילתית של X למס' איברי הבסיס הטבעי שלו. (שכן: $H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in I}\mathbb{Z}$)

הוכחה

(א) $\partial_0 : C_0(X) \to 0$ ולכן $Z_0(X) = C_0(X)$ $(\ker\partial_0 =)$

$B_0(X)$ נוצר ע"י כל האיברים שהם מהצורה $\partial\sigma$ כאשר σ סימפלקס סינגולרי 1 מימדי (כלומר $\sigma:\Delta^1\to X$ מסילה)

נסמן $E_0(X) = \{\sum n_i \underbrace{p_i}_{} \in C_0(X) : \sum n_i = 0\}$

סימפלקס סינגולרי 0-מימדי שהוא בחירת נקודה $p_i\in X$

21/3/12

<u>טענה</u> $B_0(X) = E_0(X)$

<u>הוכחת הטענה</u>

$\supseteq$ באופן כללי $\partial\sigma$ הינו מהצורה $\partial\sigma = p_1 - p_0$

(כאשר $p_0 = \sigma(0)$, $p_1 = \sigma(1)$ קצוות המסלה שהינו תמונת σ )

ולפי הגדרת E_0 : $p_1 - p_0 \in E_0$

$\subseteq$ # כיוון ש-X קשיר מסילתית, כל שרשרת מהצורה $p-q$ $(p,q \in X)$ מתקבלת באופן הבא:

נקח σ להיות מסלה מ-p ל-q, אזי $\partial\sigma = p - q \in B_0$

על כן $p - q \in B_0(X)$

יהי $\sum n_i p_i \in E_0$ אזי $\sum n_i p_i = \sum n_i (p_i - q)$ (כי $\sum n_i = 0$)

כאשר q נק' קבועה במרחב.

הראינו $\partial\sigma = p_i - q \in B_0$ (נוצר ב-B_0) אזי

$$\sum n_i p_i = \sum n_i (p_i - q) \in B_0$$

טענה ■

<u>שים לב</u> $B_0(X) \subseteq E_0(X)$ <u>לכל</u> מ"ט X

ההכלה השניה נכונה רק כאשר X קשיר מסילתית (כי אז כל שרשרת מהצורה $p-q$ מתקבלת כשפה).

כעת נגדיר $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$

ע"י $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$ (במילים אחרות: הגדרנו הסתכלה על היוצרים: $\varepsilon(\sigma) = 1$)

אזי $\ker \varepsilon = E_0(X)$ וגם ברור ש-ε על $\mathbb{Z}$.

ולכן:

$$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{C_0(X)}{E_0(X)} \cong \mathbb{Z}$$

■ מ.ש.ל

ובקשר לזה...

ההגדרה של ε מאפשרת לנו להגדיר <u>הומולוגיה מצומצמת</u>

<u>הומולוגיה (רגילה)</u>	<u>הומולוגיה מצומצמת</u>
$\downarrow \partial$	$\downarrow \partial$
$C_1(X)$	$C_1(X)$
$\downarrow \partial$	$\downarrow \partial$
$C_0(X)$	$C_0(X)$
$\downarrow \partial$	$\downarrow \varepsilon$
0	$\mathbb{Z}$

21/3/12

6/11

← זה עדיין קומפלקס שרשראות כי $B_0(X)\subseteq E_0(X)$ (תמיד!) ולכן $\partial\circ\varepsilon=0$.

נסמן הומולוגיה מצומצמת ב $\tilde{H}_n(X)$

נשים לב שלכל $n>0$ $H_n(X)=\tilde{H}_n(X)$. עבור $n=0$: $\tilde{H}_0(X)=\frac{E_0(X)}{B_0(X)}$.

- ההומולוגיה המצומצמת של נקודה היא $\tilde{H}_n(\{p\})=0$ לכל n (כולל $n=0$).
- באופן כללי (לפי א): אם X קשיר מסילתית $H_0(X)=\mathbb{Z}$ אך $\tilde{H}_0(X)=0$
- $H_n(\emptyset)=0$ לכל n וההומולוגיה המצומצמת של $\emptyset$ לא מוגדרת

ב) יהיו $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ רכיבי קשירות מסילתית של X.
כיוון שכל סימפלקס סינגולרי $\sigma:\Delta^n\to X$ הוא העתקה רציפה וΔ^n קשיר מסילתית, אז התמונה של כל σ מוכלת רק באחד מרכיבי הקשירות.
לכן בהרכבה עם פונק' ההכלה ניתן לחשוב עליו כסימפלקס סינגולרי מΔ^n לרכיב A_α עבור $\alpha\in I$ מסוים.
בכך מתקבלת חלוקה: $S_n(X)=\biguplus_{\alpha\in I}S_n(A_\alpha)$

$FA(\biguplus_\alpha S_\alpha)=\bigoplus_\alpha FA(S_\alpha)$ טענה כללית

ההעתקת שפה מכבדת את הסכום הישר הנ"ל:

$C_n(A_\alpha)\xrightarrow{\partial}C_{n-1}(A_\alpha)$ $\quad\forall\alpha\in I$

(תעתיק כל סימפלקס סינגולרי $\Delta^n\to A_\alpha$ לסכום של סימפלקסים סינגולריים $\Delta^{n-1}\to A_\alpha$ (עבור אותו α!))

ולכן העתקת השפה היא סכום ישר של העתקות שפה על רכיבי הקשירות המסילתיות, ובהתאמה גם ה $\ker\partial$ וה $\mathrm{Im}\,\partial$ מתפרקים לסכום ישר.
⇐ המנה תהיה סכום ישר של מנות
כלומר $H_n(X)=\bigoplus_\alpha H_n(A_\alpha)$

ב ∎

— מ.ש.ל —

note: חלק ב) נכשל בהומולוגיה המצומצמת:
נקח $\alpha\neq\beta\in I$:

$$\begin{tikzcd} C_0(A_\alpha) \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C_0(A_\beta) \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

לפי הגדרה, כולם מועתקים לאותו $\mathbb{Z}$ (יש רק $\mathbb{Z}$ אחד)

($\mathbb{Z}\neq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
ולסימטריות $0=0\oplus0$)

נרצה להבין את הקשר בין ההומולוגיה הרגילה למצומצמת:

כאשר $H_0(X)=\frac{C_0(X)}{B_0(X)}$, $\tilde{H}_0(X)=\frac{E_0(X)}{B_0(X)}$

טענה ε מוגדר היטב על $H_0(X)$

הוכחה כי הגדרנו $C_0(X)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}$

ומתקיים $B_0(X)\subseteq\ker\varepsilon$

ולכן ε משרה הומומ' על המנה: $\hat{\varepsilon}:H_0(X)\to\mathbb{Z}$

■

מתברר ש- $\ker\hat{\varepsilon}=\tilde{H}_0(X)$ ולכן $\tilde{H}_0(X)$ תת"ח של $H_0(X)$.

← ראינו: $H_0(X)\cong\bigoplus_\alpha\mathbb{Z}$ (בהתאם למרכיבי הקשירות המסילתיים)

• יוצרים של $H_n(A_\alpha)$: כל נק' בודדת שהיא (= סימפלקס סינגולרי אפס ממדי)

כל הנק' שקולות כי A_α קשירה מסילתית.

אם כן $\bigoplus_\alpha\mathbb{Z}\xrightarrow{\hat{\varepsilon}}\mathbb{Z}$ כאשר $\hat{\varepsilon}$ לוקחת את סכום המקדמים.

למשל: $\hat{\varepsilon}:\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathbb{Z}$

$(a_1,\dots,a_n)\longmapsto\sum a_i$

מהו הגרעין? $\tilde{H}_0=\mathbb{Z}^{n-1}$

[רוצים את הנק' $(a_1,\dots,a_n)$ כך ש $\sum a_i=0$. קובעים $n-1$ ערכים ויש חופש בבחירה של הערך ה-n]

ובאופן כללי: $FA(S)\xrightarrow{\varphi}\mathbb{Z}$

$\sum n_is_i\longmapsto\sum n_i$

(מושרה מהעתקה של היוצרים $s_i\longmapsto 1$)

טענה (תרגיל) $\ker\varphi\cong FA(S-\{s_0\})$

⇐ מסקנה $\tilde{H}_0(X)=FA$(מרכיבי הקשירות המסילתיים פחות אחד מהם)

הערה עתה ברור כי חלק ב של המשפט האחרון לא נכון עבור ההומולוגיה המצומצמת.

$H_0(X)$ הרגילה אדטיבית על סכום מרכיבי הקשירות המסילתיים אבל $\tilde{H}_0(X)$ המצומצמת לא אדטיבית.

למשל $X=\bullet\ \bullet\ \bullet$

$\tilde{H}_0(X)\cong\mathbb{Z}^2$

ולעומת זאת:

$\tilde{H}_0(\bullet)\oplus\tilde{H}_0(\bullet)\oplus\tilde{H}_0(\bullet)=0$

$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{}}$

21/3/12

אם כן, הגענו להבנה מה זה $H_0, \tilde{H}_0$: הם בעצם רכיבי הקשירות המסילתית של X (או פחות אחד) - הם כשלעצמם לא מצדיקים הגדרת הומולוגיה.

← נעבור לדבר על H_1:

משפט יהי X מ"ט קשיר מסילתית. אז $H_1(X)\cong Ab(\pi_1(X))$

נוכיח טענות עזר:

(א) אם $\sigma\in C_1(X)$ סימפלקס סינגולרי **קבוע** אז σ שפה

← הוכחה

ראינו במהלך חישוב ההומולוגיה של נקודה

$$\partial K_n = \begin{cases} K_{n-1} & \text{n זוגי} \\ 0 & \text{n אי זוגי} \end{cases}$$

אם כן, אז $\partial K_2 = K_1$

$$\left(\Delta \xrightarrow{K_2} p\right) \xmapsto{\ \partial\ } \left(\underset{0\quad 1}{\vdash\!\!-\!\!\dashv} \longrightarrow p\right)$$

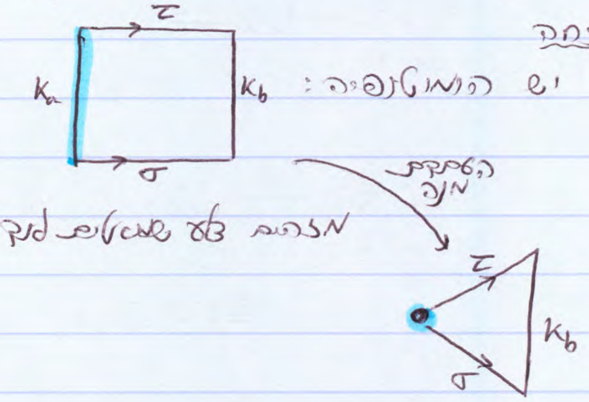
$$\underset{p}{(0)}+\underset{p}{(1)}-\underset{p}{(2)} = p$$

■

(ב) אם $\tau \simeq_I \sigma$ הומוטופיות ביחס לקצוות אז $\tau-\sigma$ שפה.

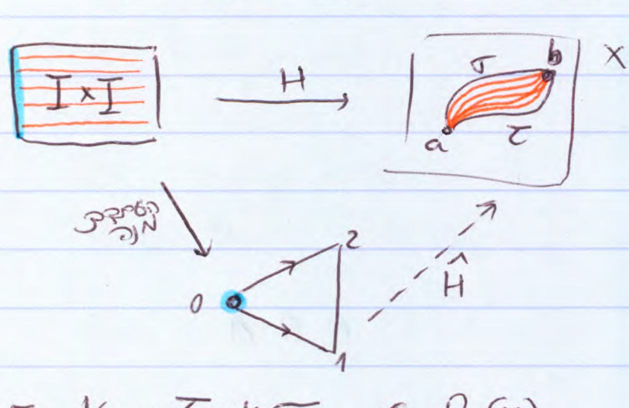
← הוכחה

יש הומוטופיה:



מכווצים צלע שמאלית לנק' בודדת

אז מושרית העתקה: $\hat{H}: \Delta \to X$



$$\Rightarrow \hat{H}\in C_2(X)$$

ומתקיים:

$$\partial\hat{H} = \underset{\text{לצלע 0}}{K_b} - \underset{\text{לצלע 1}}{\tau} + \underset{\text{לצלע 2}}{\sigma} \in \underset{\text{שפה!}}{B_1(X)}$$

21/3/12

9/11

אבל גם K_b שפה (לפי א) הפרש של שפות הינו שפה (כי $B_1(X)$ חבורה)
ולכן גם $\tau-\sigma$ שפה.

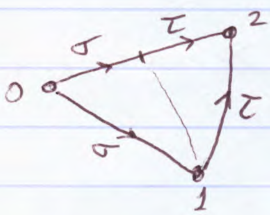
במימד 2

(היה אפשר גם להסתכל על השפה של $\hat{H}-K_b^2$
$\partial(\hat{H}-K_b^2) = \cancel{K_b^1}-\tau+\sigma-\cancel{K_b^1} = \sigma-\tau$)

■

(ג) אם $\sigma(1)=\tau(0)$ אז $\sigma+\tau-\sigma*\tau$ שפה

(<u>הערה</u> תחת העתקת השפה נגזות נשמרת.
כלומר שפה של חב מחוברים הינו סכום של מחוברים
שפה של מחובר יחד לה 3 מחוברים)



נתבונן בסימפלקס הסינגולרי

השפה שלו הינו: $\tau-\sigma*\tau+\sigma$

■

(3) $\sigma+\bar\sigma$ שפה

ניעזר מ-(ב)-(ג) כי: $\sigma+\bar\sigma-\sigma*\bar\sigma$ שפה

$\sigma*\bar\sigma \sim K_a$ ולכן $\sigma*\bar\sigma-K_a$ שפה

אבל K_a שפה והפרש שפות הינו שפה

$\therefore$ ולכן $\sigma+\bar\sigma$ שפה.

■

(#) לצורך הוכחת המשפט באופן חד פעמי נסמן את המחלקות ב π_1 ע"י $< >$ כדי להבדיל מאיברי H_1 שנסמן כרגיל $[\ ]$.

<u>הוכחת המשפט</u>

נגדיר העתקה $F: \pi_1(X) \longrightarrow H_1(X)$
ע"י $F(<\varphi>) = [\varphi]$

(*) למה φ מחזור? זהו סימפלקס סינגולרי שמתחיל ונגמר באותה נקודה (ולכן יוצא אפס בהעתקת השפה)

(*) F מוגדרת היטב לפי (ב): 2 מסלולים הומוטופיים ביחס לקצוות הפרשם שפה ולכן שייכים לאותה מחלקה בחב' ההומולוגיה.

21/3/12

10/11

(*) F הומומ' של חבורות – לפי (ב) : השרשור הומולוגי לסכום פורמלי.

$H_1(X)$ אבלית ולכן מושרה הומומ'

$$\hat{F}: Ab(\pi_1(X)) \longrightarrow H_1(X)$$

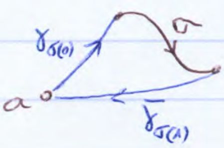
(תכונה אוניברסלית של אבליניזציה)

כדי להראות שזה איזו' נבנה העתקה בכיוון ההפוך:
לשם כך לכל $x \in X$ נבחר אחת ולתמיד מסילה γ_x מ-a ל-x
(כאשר a נק' בסיס של $\pi_1(X)$)

ונגדיר $G: C_1(X) \longrightarrow Ab\,\pi_1(X)$

$$G(\sigma) = \langle\langle \gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \bar{\gamma}_{\sigma(1)} \rangle\rangle$$ (הגדרה על הבסיס)

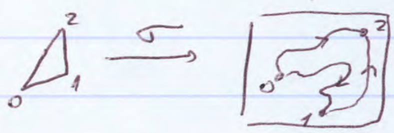
מחלקה ב-π_1 ; מחלקה ב Ab



נתבונן בצמצום $G|_{Z_1(X)}: Z_1(X) \longrightarrow Ab\,\pi_1(X)$

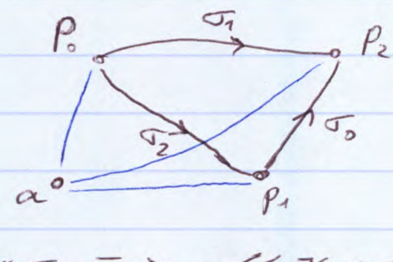
(על נתחילה התחלנו ב C_1 כי היא חופשית ואנו מכירים את הבסיס שלה
Z_1 חופשית (תת של חופשית היא חופשית) אבל אין לנו בסיס מוכר)

כדי ש $G|_{Z_1}$ תשרה הומומ' על המנה $H_1(X)$ יש להראות
ש $B_1(X) \subseteq Ker(G|_{Z_1})$ כלומר שלכל שפה b מתקיים $G(b)=0$
מספיק להראות זאת על יוצרים של $B_1(X)$ – כלומר על איברים
מהצורה $\partial\sigma$ עבור σ סימפלקס סינגולרי 2-מימדי.



כלומר צ"ל $G(\underbrace{\sigma\circ\tau_0}_{\sigma_0} - \underbrace{\sigma\tau_1}_{\sigma_1} + \underbrace{\sigma\tau_2}_{\sigma_2}) = 0$

נסמן:



$$G(\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2) = \langle\langle \gamma_{p_1} * \sigma_0 * \bar{\gamma}_{p_2} \rangle\rangle - \langle\langle \gamma_{p_0} * \sigma_1 * \bar{\gamma}_{p_2} \rangle\rangle + \langle\langle \gamma_{p_0} * \sigma_2 * \bar{\gamma}_{p_1} \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \gamma_{p_1} * \sigma_0 * \bar{\gamma}_{p_2} \rangle\rangle + \langle\langle \gamma_{p_2} * \bar{\sigma}_1 * \bar{\gamma}_{p_0} \rangle\rangle + \langle\langle \gamma_{p_0} * \sigma_2 * \bar{\gamma}_{p_1} \rangle\rangle =$$

באבליניזציה:

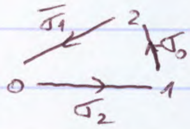
$\left(\underset{\text{בחיבורי}}{-[\gamma]} \equiv [\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]\right)$

<u>21/3/12</u>

$$= \langle\langle (\gamma_{p_1} * \sigma_0 * \cancel{\bar{\gamma}_{p_2}}) * (\cancel{\gamma_{p_2}} * \bar{\sigma}_1 * \cancel{\bar{\gamma}_{p_0}}) * (\cancel{\gamma_{p_0}} * \sigma_2 * \bar{\gamma}_{p_1}) \rangle\rangle =$$

(אבליזציה
של הומו'
$[\gamma]+[\sigma]=[\gamma+\sigma]$)

$$= \langle\langle \gamma_{p_1} * \underbrace{(\sigma_0 * \bar{\sigma}_1 * \sigma_2)} * \bar{\gamma}_{p_1} \rangle\rangle = \langle\langle \gamma_{p_1} * \bar{\gamma}_{p_1} \rangle\rangle = 0$$



יש הומוטופי :

ולכן מושרה $\hat{G} : H_1(X) \to Ab\Pi_1(X)$

נותר להראות: $\hat{G} \circ \hat{F} = Id_{Ab\Pi_1(X)}$

$\hat{F} \circ \hat{G} = Id_{H_1(X)}$

∎

המשך יבוא...

הרצאה 3 - 18/4/12

__סימון:__ אם σ הומולוגי ל-τ נסמן: $\sigma\approx\tau$

← בשפה זו ניתן לרשום מחדש את הטענות משיעור שעבר:

א) $k_p \approx 0$

ב) $\sigma \underset{\partial}{\simeq} \tau \Rightarrow \sigma\approx\tau$

ג) $\sigma * \tau \approx \sigma+\tau$

ד) $\bar{\sigma} = -\sigma$

__תזכורת__ היינו בהוכחת המשפט שאם X קשיר מסילתית $H_1(X)\cong Ab\pi_1(X,a)$
ע"י הסתכלות ב-2 כיוונים:

1)
$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,a) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_1(X) \\ & Ab\pi_1(X,a) \arrow[ur, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$
$$\langle\varphi\rangle \longmapsto [\varphi]$$

2)
$$\hat{G}: H_1(X) \longrightarrow Ab\pi_1(X,a)$$
$$[\sigma] \longmapsto \langle\langle \gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \bar{\gamma}_{\sigma(1)} \rangle\rangle$$

נשאר לנו להוכיח ש-$\hat{F}$ ו-$\hat{G}$ הפיכות זו לזו:

__כיוון קל__

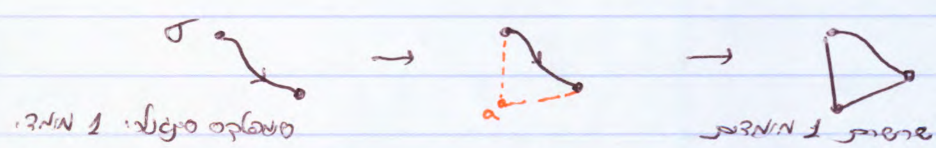
$$\hat{G}\circ\hat{F}(\langle\langle\varphi\rangle\rangle) = \hat{G}([\varphi]) = \langle\langle \gamma_a * \varphi * \bar{\gamma}_a \rangle\rangle = \langle\langle\varphi\rangle\rangle$$

φ מסלה ב-a

הצמדה ב-γ_a
באבלי צמוד זה אותו איבר

__כיוון שני__

$$\hat{F}\circ\hat{G}([\sigma]) = \hat{F}(\langle\langle \gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \bar{\gamma}_{\sigma(1)} \rangle\rangle) = [\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \bar{\gamma}_{\sigma(1)}]$$



אין פה נתעב בהחמת הסימפלקס! אבל נראה ש-σ עבר למחבור הומולוגי לו.

← לשם כך נגדיר הומומ' $C_0(X) \xrightarrow{R} C_1(X)$
על היוצרים: $R(p) := \gamma_p$

סימפלקס סינגולרי 0 מימדי שחושבים עליו כעל נקודה $p\in X$

18/4/12

2/10

אז מתקיים:

$$\hat{F}\circ\hat{G}(\sigma) \overset{②}{\approx} \gamma_{\partial\sigma(0)}+\sigma+\bar{\gamma}_{\partial\sigma(1)} \overset{③}{\approx} \sigma+\gamma_{\partial\sigma(0)}-\gamma_{\partial\sigma(1)} = \sigma - R(\partial\sigma)$$

$$\gamma_{\sigma(0)}-\gamma_{\sigma(1)} = R(\sigma(0))-R(\sigma(1)) \underset{R \text{ הומו'}}{=} -R(\underbrace{\sigma(1)-\sigma(0)}_{\partial\sigma})$$

אם כן

$$\hat{F}\circ\hat{G}(\Sigma\sigma_i) \approx \Sigma\sigma_i - R(\partial\Sigma\sigma_i)$$

כלומר לכל שרשרת c

$$\hat{F}\circ\hat{G}(c) \approx c - R(\partial c)$$

בפרט, עבור מחזור z

$$\hat{F}\circ\hat{G}(z) \approx z - R(\underset{0}{\underset{\|}{\partial z}}) = z$$

(להבהיר: כיוון שזה מחזור $\hat{F}\circ\hat{G}$ מוסיף לו צלעות γ שמתבטלות)

$\Leftarrow$ $\hat{F}\circ\hat{G}(Z) \approx Z$

וסה"כ $\hat{F}$ ו $\hat{G}$ הפוכות זו לזו

—— משפט ——

הערה עבור X לא קשיר מסילתית

$$H_1(X) = \bigoplus_\alpha H_1(A_\alpha) = \bigoplus_\alpha Ab\,\pi_1(A_\alpha)$$

אז הגענו להבנה של H_0 ו H_1 הם לבדם לא נותנים לנו שום דבר חדש

H_0 - מרכיבי קשירות מסילתית

H_1 - אבליזציה של חבורה יסודית

אלו לא מושגים חדשים ולא מצדיקים הגדרה של הומולוגיה.

עכשיו נרצה לדבר על H_2 שהוא כבר מושג לגמרי חדש.

$\leftarrow$ אבל קודם נדון ברמה מושגית של אלגברה הומולוגית:

הגדרה אם יש סדרת חבורות אבליות וסדרת הומומו'

$$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$$

f,g הומומו' של חבורות אבליות

סדרה כזו נקראת מדויקת ב B אם $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$

סדרה נקראת מדויקת אם היא מדויקת בכל מקום.

⊛ קומפלקסי שרשראות נרשום בד"כ אנכית וסדרות מדויקות אופקית.

~~מקרים פשוטים~~

~~$\leftarrow 0 \to A \xrightarrow{f} B$ (*)~~

18/4/12

3/10

<u>מקרים פשוטים</u>

① $0 \to A \xrightarrow{f} B$ מדויקת $\Longleftrightarrow$ f חח"ע

② $A \xrightarrow{f} B \to 0$ מדויקת $\Longleftrightarrow$ f על

③ $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ מדויקת $\Longleftrightarrow$ f איזומורפיזם

④ <u>סדרה מדויקת קצרה</u> $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ $\Longleftrightarrow$

f חח"ע ומשכנת את A ב-B

g על ובתמונת A ב-B הוא 0 ב-C.

ולכן C הינו מעין חבורת מנה $B/f(A)$

שמעשה, g משרה איזו':

$$B/f(A) \longrightarrow C$$

כל מנה ניתן לרשום כסדרה קצרה מדויקת

<u>למשל</u> אם $A \subseteq B$ ניתן לרשום:

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to B/A \to 0$$

הכלה

באופן כללי בד"כ תהיה לנו סדרה אינסופית

$$\cdots \to A_i \to A_{i+1} \to A_{i+2} \to \cdots$$

וזה יעזור לנו בהמשך להבין דברים על ההומולוגיה ועל המרחבים השונים.

<u>מרדף דיאגרמות</u> - כינוי להוכחות על דיאגרמות מתחלפות

נתן דוגמה אחת חשובה שמבהירה את הטכניקה:

בהינתן

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 & \to & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 & \to & B_5 \end{array}$$

כאשר השורות מדויקות והדיאגרמה מתחלפת

<u>למת ה-5</u>

① אם f_2, f_4 חח"ע ו f_1 על אז f_3 חח"ע

② אם f_2, f_4 על ו f_5 חח"ע אז f_3 על

<u>בפרט</u>: במקרה המיוחד ש: f_1, f_2, f_4, f_5 הם איזו'

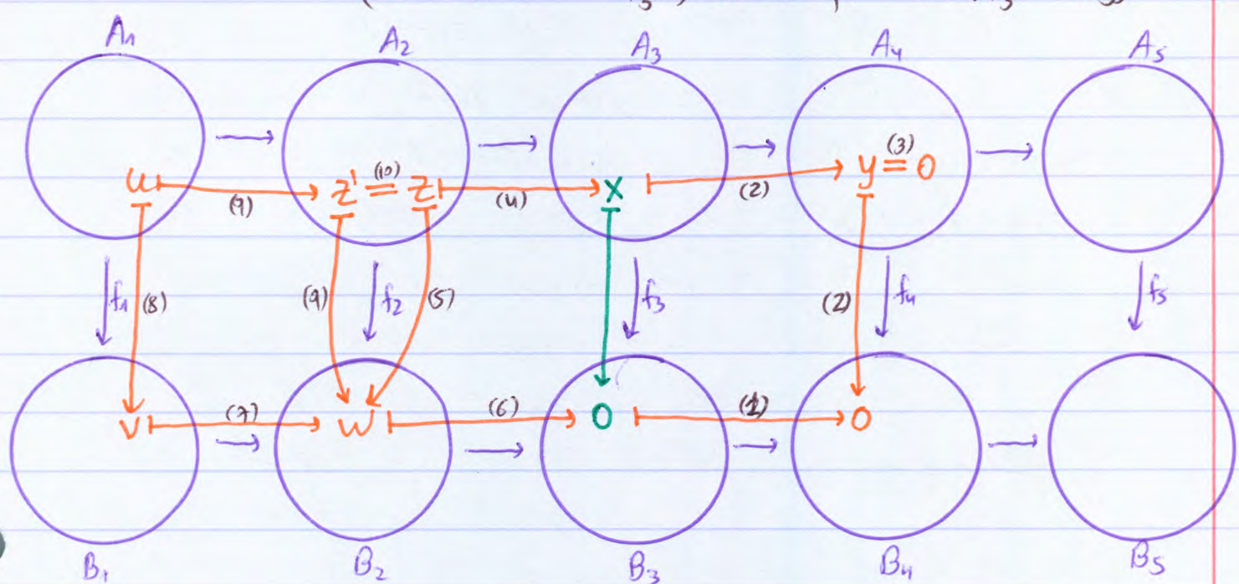
אזי גם f_3 הוא איזו'.

18/4/12

4/10

הוכחה

(א) ← נניח $x\in A_3$ כך ש $f_3(x)=0$ (צ"ל $x=0$)



הסברים

(1) - הומומ'

(2) - התחלפות הדיאגרמה

(3) - f_4 חח"ע

(4) - שורה עליונה היא סדרה מדויקת

(5) - נסמן $f_2(z)=:w$

(6) - התחלפות הדיאגרמה

(7) - שורה תחתונה היא סדרה מדויקת

(8) - f_1 היא על

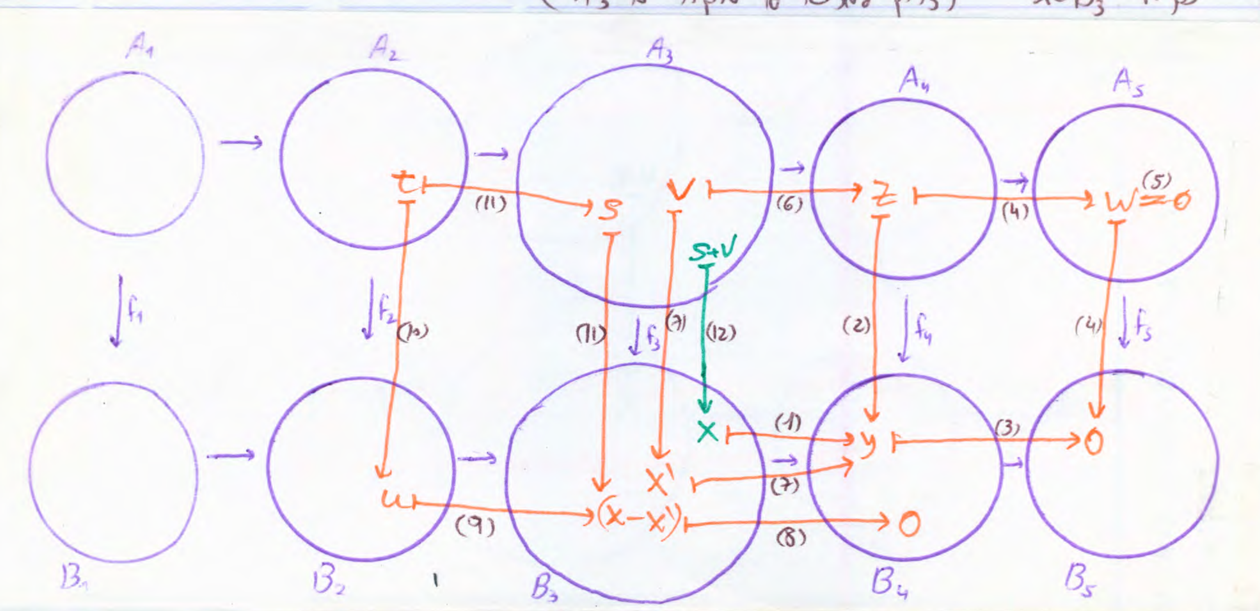
(9) - התחלפות הדיאגרמה

(10) - $z'=z$ כי f_2 חח"ע

⇐ $u\mapsto z\mapsto x$

וכיוון שהסדרה מדויקת $\underline{x=0}$.

(ב) ← נקח $x\in B_3$ (צריך למצוא לו מקור ב A_3)



18/4/12

5/10

<u>הסברים</u>

(1) - נסמן תמונה של x : y

(2) - f_4 על

(3) - שורה תחתונה רשו סדרה מדויקת

(4) - התחלפות הדיאגרמה

(5) - f_5 חח"ע

(6) - שורה עליונה סדרה מדויקת

(7) - התחלפות הדיאגרמה

(8) - הומומ'. (מייצרים איבר שהולך לאפס)

(9) - שורה תחתונה סדרה מדויקת

(10) - f_2 על

(11) - התחלפות הדיאגרמה

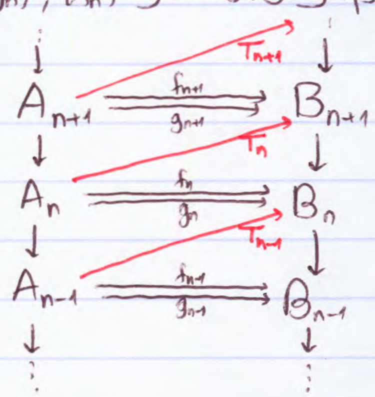
(12) - הומומ' נקבל: $s+v \mapsto (x-x')+x' = x$

ולכן מצאנו מקור ל x ב A_3.

— משל —

<u>הומוטופית שרשראות</u> (עוד מושג באלגברה הומולוגית)

בהינתן קומפלקסי שרשראות A, B ושני העתקות שרשראות $\{f_n\}, \{g_n\}$

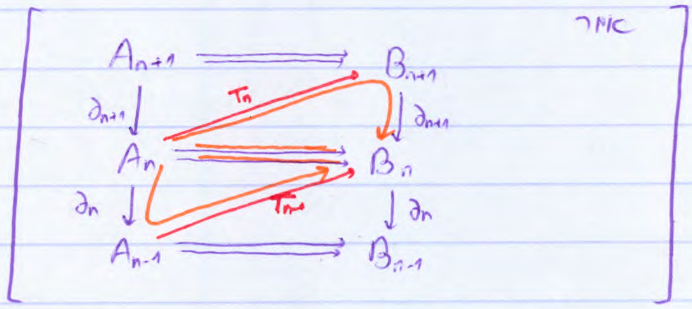


<u>הגדרה</u>

סדרת העתקות $\{T_n\}$: $T_n : A_n \to B_{n+1}$

נקראת <u>הומוטופית שרשראות</u> מ $\{f_n\}$ ל $\{g_n\}$

אם $f_n - g_n = \partial_{n+1} T_n + T_{n-1} \partial_n$ לכל n.



ראינו שהעתקות שרשראות משרות הומומ' על ההומולוגיה.

<u>טענה</u> אם יש הומוטופית שרשראות מ $\{f_n\}$ ל $\{g_n\}$ אז f_n ו g_n משרות את אותם ההומומורפיזם על ההומולוגיה.

<u>הוכחה</u>

בהינתן מחזור z

$$f_n(z) - g_n(z) = \partial T z + T \underbrace{\partial(z)}_{=0} = \partial T z$$

ולכן זו באמת שפה!

■

18/4/12

6/10

הגדרה

יהיו קטגוריות: C, D

ו- 2 פונקטורים: $C \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} D$

<u>העתקה טבעית</u> מ F ל G היא אוסף של מורפיזמים ב D עבור כל אוביקט ב C.

כלומר לכל $X \in C$ יש $\varphi_X : F(X) \to G(X)$

כך שלכל $X, Y \in C$ ולכל $X \xrightarrow{h} Y$ (h מורפיזם של C)

הדיאגרמה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(h)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

איור

$$\begin{tikzcd} C \ni X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & F(X) \in D \arrow[d, "\varphi_X"] \\ & G(X) \in D \end{tikzcd}$$

<u>דוגמא</u> $C =$ מ"ט מנוקדים

$D =$ חבורות

וראינו 2 פונקטורים: π_1 ו- H_1

בנינו העתקה $(\varphi_X =)\ f : \pi_1(X, a) \to H_1(X)$

$\ell \mapsto \ell$

לולאה   סימפלקס סינגולרי

נראה ש F היא העתקה טבעית

לכל $f : X \to Y$, $a \mapsto b$:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,a) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "F_X"'] & \pi_1(Y,b) \arrow[d, "F_Y"] \\ H_1(X) \arrow[r, "f_*"'] & H_1(Y) \end{tikzcd}$$

נראה שאכן הדיאגרמה מתחלפת:

<u>כיוון א'</u>: $\langle\gamma\rangle \xmapsto{f_*} \langle f\circ\gamma\rangle \overset{F_Y}{\longmapsto} [f\circ\gamma]$

<u>כיוון ב'</u>: $\langle\gamma\rangle \overset{F_X}{\longmapsto} [\gamma] \xmapsto{f_*} [f\circ\gamma]$

18/4/12

7/10

דוגמא: C = מט' מנוקדים קשורים מסילתית

D = חבורות (אבליות)

והפנקטורים: H_1 , $Ab\,\pi_1$

אזי F העתקה טבעית היא איזו' ← איזומורפיזם טבעי

חזרה לטופולוגיה...

הקדמה

בפונקטור ההומוטופי (π_n) מרחב כוויץ (שקול הומוטופית לנקודה) מקיים $\pi_n(X)=0$
נרצה להראות שכך גם קורה בהומולוגיה. למדנו: $\tilde{H}_n(\{p\})=0$ לכל n
לכן נרצה להוכיח שמרחבים שקולים הומוטופית אותה הומולוגיה ומזה נסיק שההומולוגיה של מרחב כוויץ היא טריוויאלית. כיוון שאת ההומולוגיה בנינו ע"י סימפלקסים שהם מרחבים קמורים, ראשית נראה שההומולוגיה של סימפלקס היא טריוויאלית.

משפט יהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קמור אזי $\tilde{H}_n(X)=0$ לכל n.

הוכחה

← נגדיר פעולת חרוט

נקבע $a\in X$ $\quad C_a: C_n(X)\longrightarrow C_{n+1}(X)$

נגדיר ע"י הבסיס: עבור $\sigma\in C_n(X)$ סימפלקס סינגולרי

$\sigma:\Delta^n\longrightarrow X$

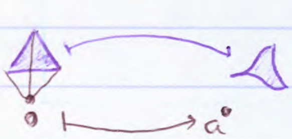
נחשוב על Δ^n כ"דופן האפס" (כלומר בו שמאל קודקוד האפס) ב Δ^{n+1}

אם מספר הקודקודים = Δ^n נזיז כל אחד ב +1 לפי אותו סדר נקדים ה-1

נגדיר

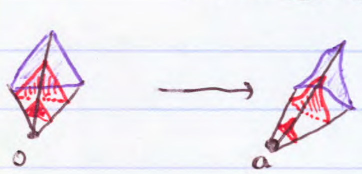
$$C_a\sigma(0)=a$$

$$C_a\sigma\circ\tau_0=\sigma$$



ו $C_a\sigma$ לינארית לאורך כל קרן שיוצאת מ 0.

כלו' $C_a\sigma\circ\tau_i = C_a(\sigma\circ\tau_{i-1})$



אולי פורמלית:

$$C_a\sigma\left((1-t)s+t\cdot 0\right)=(1-t)\sigma(s)+t\cdot a$$

$$s\in\Delta^n\hookrightarrow\Delta^{n+1}$$

← שים לב שהבניה אפשרית כי X קמור! (למעשה מספיק: כוכבי ב a)

18/4/12

8/10

← נחשב $\partial C_a(\sigma)$:

$$\partial C_a(\sigma) = \underset{\text{השמטת 0}}{\sigma} - \underset{\text{השמטת 1}}{C_a(\sigma\circ\tau_0)} + C_a(\sigma\circ\tau_1) - \dots = \sigma - \underset{\text{הומומ' } C_a}{C_a(\partial\sigma)}$$

נעבור לכלל ונקבל $\partial C_a + C_a\partial = Id$

⇐ C_a הומוטופיה שרשראות (בין Id ל-0)!

← כעת, בהינתן מחזור z: $C_a(z)$ שרשרת כך ש

$$\partial(C_a z) = z - C_a(\partial z) = z$$

כלומר: כל מחזור הוא שפה!

$Z_n(X) = B_n(X)$ ⇐ ההומולוגיה היא אפס

(ולא רק, יש לנו גם דרך קונסטרוקטיבית למצוא שרשרת שהשפה שלה היא בדיוק z)

— משל —

תרגיל לברר מה קורה במימד 0 ל-$H_0(X)$ ול-$\tilde{H}_0(X)$
(רמז: המשפט נכון עבור $\tilde{H}_0(X)$ ולא עבור $H_0(X)$)

משפט יהיו X,Y מ"ט

$f \sim g : X \to Y$ אזי לכל n

$$f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

הוכחה

מספיק להוכיח את המקרה הפרטי הבא:

יהי X מ"ט. $i,j : X \to X\times I$ מוגדרים ע"י $i(x) = (x,0)$ $j(x) = (x,1)$ אזי $i_* = j_*$

⊛ זהו מקרה פרטי כי i ו-j הומוטופיים

⊛ מספיק להוכיח את הטענה כי בהינתן הומוטופיה

$H : X\times I \to Y$

מ-f ל-g. אזי: $f = H\circ i$, $g = H\circ j$

ולכן

$$f_* = H_*\circ i_* \underset{\text{לפי המקרה הפרטי}}{=} H_*\circ j_* = g_*$$

18/4/12

9/10

נוכיח את המקרה הפרטי: נבנה הומוטופית שרשראות מ $i^0_\#$ ל $j^0_\#$

(כי ראינו שבמקרה כזה הן משרות את אותו הומומ' על ההומולוגיה)

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
 & C_{n+1}(X) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & C_{n+1}(X\times I) \arrow[d] \\
i^0_\#, j^0_\#: & C_n(X) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] \arrow[ur, dashed] & C_n(X\times I) \arrow[d] \\
 & C_{n-1}(X) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] \arrow[ur, dashed] & C_{n-1}(X\times I) \arrow[d] \\
 & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

כלומר נבנה סדרת העתקות $T_n: C_n(X)\to C_{n+1}(X\times I)$ כך ש- $\boxed{i^0_\# - j^0_\# = \partial T + T\partial}$ (א)

יתר מזה, נבנה העתקה T טבעית

[נעבוד באינדוקציה. ובאינדוקציה לפעמים יותר קל להוכיח משהו חזק יותר כי אז הנחת האינדוקציה יותר חזקה.]

יש פה 2 פונקטורים

$X \mapsto C_n(X)$

$f \mapsto f_\#$

$X \mapsto X\times I \mapsto C_n(X\times I)$

$f \mapsto f\times Id \mapsto (f\times Id)_\#$

דרישת T טבעית במובן שהדיאגרמה מתחלפת:

$$
\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "T"'] & C_n(Y) \arrow[d, "T"] \\
C_{n+1}(X\times I) \arrow[r, "(f\times Id)_\#"'] & C_{n+1}(Y\times I)
\end{tikzcd}
$$

כלומר $\boxed{T\circ f_\# = (f\times Id)_\#\circ T}$ (ב)

← מספיק להגדיר את T עבור $I_n\in C_n(\Delta^n)$ ~ העתקת הזהות

זה מכריח איך T פועל על כל סימפלקס סינגולרי $\sigma\in C_n(X)$ של X

למה? נניח $\sigma\in C_n(X)$, ניתן לחשוב על σ כ- $\sigma=\sigma\circ I_n$ $(\Delta^n\xrightarrow{I_n}\Delta^n\xrightarrow{\sigma}X)$

ואז $\sigma=\sigma\circ I_n=\sigma_\#(I_n)$

ואז מהדרישה לטבעיות (ב) נקבל עליו ש

$$T(\sigma)= T(\sigma_\#(I_n)) \overset{(ב)}{=} (\sigma\times Id)_\# T(I_n)$$

נגדיר את T באינדוקציה על n:

<u>בסיס האינדוקציה</u> תרגול לבית (2 מקרים: H_0 ו $\tilde{H}_0$)

<u>הנחת האינדוקציה</u> נניח שהגדרנו את T עבור כל X ולכל $k<n$

כך ש- (ב) T טבעית

(א) מקיים $i^0_\#-j^0_\#=\partial T+T\partial$

(במקום שהוגדר עבורו)

18/4/12

10/10

<u>עבור n</u> נגדיר שרש' $T(I_n)$ (עבור $I_n\in C_n(\Delta^n)$ הנקודה)

רוצים שיתקיים (ט): $i_\#(I_n) - j_\#(I_n) = \partial T(I_n) + T\partial(I_n)$

- $j_\#(I_n), i_\#(I_n) \in C_n(\Delta^n \times I)$ מוגדרים $(j\circ I_n, i\circ I_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n\times I)$
- $\partial I_n \in C_{n-1}(\Delta^n)$ (ממימד נמוך מ n) ולכן $T(\partial I_n)$ מוגדר לפי הנחת האינדוקציה

← נקבל שיש להגדיר שרש' $T(I_n)$ כך ש

$$\partial T(I_n) = -T\partial(I_n) + i_\#(I_n) - j_\#(I_n) \in C_n(\Delta^n \times I)$$

← כלומר צריך להגדיר $T(I_n)$ כך ש $-T\partial(I_n)+i_\#(I_n)-j_\#(I_n)$ הוא <u>השפה</u> שלו. אך כיוון ש $\Delta^n\times I$ הוא <u>קמור</u> $-T\partial(I_n)+i_\#(I_n)-j_\#(I_n)$ הוא שפה אמ"מ הוא <u>מחזור</u>.

לכן תנאי מספיק והכרחי להגדרת $T(I_n)$ הוא להראות ש $-T\partial I_n+i_\#(I_n)-j_\#(I_n)$ הוא מחזור:

$$\partial(-T\partial I_n + i_\# I_n - j_\# I_n) \underset{\text{הומומ'}}{=} -\partial T(\underbrace{\partial I_n}_{C_{n-1}(\Delta^n)}) + \partial i_\# I_n - \partial j_\# I_n =$$

← מהנחת האינדוקציה (ט)

$$= \overbrace{T\partial(\partial I_n) - \cancel{i_\#\partial I_n} + \cancel{j_\#\partial I_n}} + \cancel{\partial i_\# I_n} - \cancel{\partial j_\# I_n} = 0 \longrightarrow \text{!מחזור}$$

(*) ← המחוברים מצמצמים כי $i_\#, j_\#$ העתקות שרשראות (ולכן $i_\#\partial = \partial i_\#$, $j_\#\partial = \partial j_\#$)

← מצאנו שהנ"ל מחזור ולכן קיימת $T(I_n)\in C_{n+1}(\Delta^n\times I)$ שיקיים את הנדרש

ניתן להגדיר $T(I_n) := C_a(-T\partial I_n + i_\# I_n - j_\# I_n)$

← כעת לכל x ולכל $\sigma\in C_n(x)$ מוגדר: $T_\sigma := (\sigma\times Id)_\# \circ T(I_n)$

שמה שבא נראה ש T_σ אכן מקיים (ט)+(ב)

(בינתיים אנחנו יודעים שזה מתקיים עבור I_n בלבד)

הרצאה 4 - 24/4/12

בנינו את $T(I_n)$ באופן שמתקיים: $\partial T I_n + T\partial I_n = i_\# I_n - j_\# I_n$

הבהרה: j,i הם ביחס למרחב עליהם מוגדרים
$i,j : X \to X\times I$ של X נסמן: i^X, j^X
אנחנו אלו i, j של Δ^n: $\partial T I_n + T\partial I_n = i^{\Delta^n}_\#(I_n) - j^{\Delta^n}_\#(I_n)$

כדי שמתקיים טבעיות, אין ברירה אלא להגדיר $T(\sigma) := (\sigma\times Id_I)_\#(TI_n)$
ברור ש- T מקיימת ①+② על I_n. עכשיו נרצה להראות ש-T זו מקיימת ①+② לכל סימפלקס סינגולרי במימד n:

(א) T הומוטופיה שרשראות במימד n:

$$\partial T\sigma + T\partial\sigma = \partial\left((\sigma\times Id_I)_\# TI_n\right) + T\partial \underbrace{\sigma_\#(I_n)}_{=\sigma} =$$

$$= (\sigma\times Id_I)_\#\partial TI_n + T\sigma_\#(\underbrace{\partial I_n}_{\in C_{n-1}(\Delta^n)}) = \text{—"—} + (\sigma\times Id_I)_\# T(\partial I_n) =$$

כי $(\ )_\#$ העתקת שרשראות.

ולכן מהנחת האינדוקציה ②

$$\underset{\text{(הומו')}}{=} (\sigma\times Id_I)_\#\Big(\underbrace{\partial TI_n + T\partial I_n}_{=(\partial T+T\partial)(I_n)}\Big) \underset{\text{ידוע על } I_n}{=} (\sigma\times Id_I)_\#\left(i^{\Delta^n}_\#(I_n) - j^{\Delta^n}_\#(I_n)\right) =$$

$$\underset{\text{הרחבה}}{\overset{*}{=}} i^X_\#(\sigma) - j^X_\#(\sigma)$$

הסבר ⊛: $(\sigma\times Id_I)_\#\, i^{\Delta^n}_\#(I_n) = i^X_\#(\sigma)$

לכל $s\in\Delta^n$ (נפעיל עליו את צד שמאל)

$$(\sigma\times Id)_\#\, i^{\Delta^n}_\# \underbrace{I_n(s)}_{=s} = (\sigma\times Id)_\# \underbrace{i^{\Delta^n}_\#(s)}_{=(s,0)} = (\sigma\times Id)_\#(s,0) = (\sigma(s),0) = (i^X\circ\sigma)(s) = i^X_\#(\sigma(s))$$

(ב) T טבעית במימד n: $(f\times Id)_\#\circ T = T\circ f_\#$

נקח $\sigma\in C_n(X)$ כלשהו נפעיל על σ את 2 צד ונראה שוויון.

שמאל: $(f\times Id)_\#\circ T\sigma \underset{\text{הגדרה}}{=} (f\times Id)_\#\left((\sigma\times Id)_\# TI_n\right) \underset{\substack{\#\text{ פונקטור}\\ \text{(שומר הרכבה)}}}{=} \left((f\times Id_I)\circ(\sigma\times Id_I)\right)_\# TI_n =$

$$= (f\circ\sigma\times Id_I)_\# TI_n$$

ימין: $T\circ f_\#(\sigma) = T(f\circ\sigma) = (f\circ\sigma\times Id)_\# T(I_n)$

מש"ל

24/4/12

<u>מסקנה</u> אם $f:X\to Y$ שקילות הומוטופית אז לכל n
$$f_*: H_n(X)\to H_n(Y)$$
הוא איזומורפיזם. (גם במצומצמת וגם ברגילה)

<u>הוכחה</u>
מהגדרת שקילות הומוטופית יש $g:Y\to X$
כך ש- $g\circ f\sim Id_X$
$f\circ g\sim Id_Y$
ולפי המשפט שהוכחנו
מתכונות פונקטור:
$$g_*\circ f_* = (g\circ f)_* = {Id_X}_* = Id_{H_n(X)}$$
ובאותו אופן: $f_*\circ g_* = Id_{H_n(Y)}$ $\Leftarrow$ f_* איזו'.

■

<u>בפרט</u> למרחבים שקולים הומוטופית יש הומולוגיות איזומורפיות.
(המסקנה יותר חזקה: לא רק שהם איזו' אלא שהשקילות ההומוטופית משרה את האיזו'!)

<u>בפרט</u>, למרחב כוויץ יש הומולוגיה כמו לנק' בודדת.

$\Leftarrow$ בכך למעשה הראינו שפונקטור ההומולוגיה הוא בעצם פונקטור בין מ"ט ומחלקות הומוטופיה של העתקות רציפות לחבורות והומומו'

$$X\longmapsto H_n(X)$$
$$[f]\longmapsto f_*$$

<u>תזכורת</u> משפט ון קמפן
בהינתן $X=U\cup V$ שברנו מסילה של X לקטעי לבג. וכך גם לגבי הומוטופיה חילקנו מלבן לריבועים קטנים.
גם עכשיו: נרצה לשבור סימפלקס סינגולרי לסכום פורמלי של סימפלקסים קטנים מאוד מאוד. כלומר דרך $\sigma\mapsto\sum_i\sigma_i$
אבל רוצים שהפירוק הזה ישמור על תכונות (למשל שמחזור יפורק כך שהסכום גם יהיה מחזור... וכדומה. לשם כך צריך לא סתם לפרק אלא להתחשב בקודקודים וכיוונים).

24/4/12

3/8

<u>חלוקה בריצנטרית</u> - שבירת סימפלקסים

זו חלוקה של סימפלקס ביחס למרכז הכובד שלו

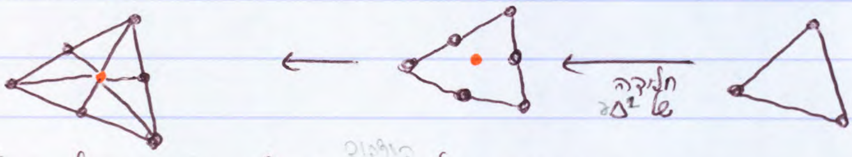
נתאר חלוקה בריצנטרית של כמה סימפלקסים:

* Δ^0 קודקוד בודד ← נשאר אותו דבר

* Δ^1

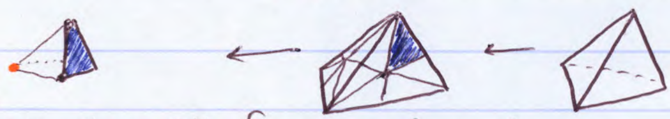
עבור כל שפה (2 הקדקודים) מקשרים למרכז ונקבל חלוקה ל-2 קטעים.

* Δ^2



קושרים כל שפה (כלל שפה לאחר חלוקה של Δ^1) למרכז.

* Δ^3



חלוקה של השפה ל-24 $(6\times 4=)$ משולשים כל אחד מחוברים למרכז ומקבלים טטראדרים קטנים.

* באופן כללי ל-Δ^n $(n+1)$ דפנות x (חלוקה של Δ^{n-1}) באינדוקציה שוברים את הסימפלקס ה-n-מימדי ל-$(n+1)!$ סימפלקסים n-מימדים קטנים.

<u>בניה</u> נבנה העתקת שרשראות

$$S_X : C_n(X) \to C_n(X)$$

שמקיימת (א) $\partial S = S\partial$ (כלומר S העתקת שרשראות)

(ב) טבעית (מפונקטור C_n לעצמו)

כלומר: $Sf_\# = f_\# S$

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y) \\ S_X \downarrow & & \downarrow S_X \\ C_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y) \end{array}$$

(ג) ממשת שבירת סימפלקסים (עבור סימפלקסים סינגולריים)

נבנה באינדוקציה על המימד n:

<u>בסיס</u> תרגיל לבית! (2 אפשרויות בנית: H_0 ! $\tilde{H}_0$)

<u>הנחה</u> נניח שה"נ מתקיים עבור $k<n$ לכל מ"ט X ולכל $\sigma\in C_k(X)$

<u>עבור n</u> ראשית נגדיר את S על $I_n\in C_n(\Delta^n)$

רוצים ש $\partial S I_n = S\partial I_n$

$\partial I_n \in C_{n-1}(\Delta^n)$ ← במימד נמוך יותר ולכן מהנחת האינדוקציה $S\partial I_n$ כבר מוגדר.

24/4/12

4/8

אם כן, כשאנו נגדיר SI_n צריך ש $S\partial I_n \in C_{n-1}(\Delta^n)$ שפה שלו
← ולכן ודאי צריך ש $S\partial I_n$ יהיה שפה.
אבל Δ^n קמורה ולכן שרשרת היא שפה אמ"מ היא מחזור
ולכן תנאי הכרחי ומספיק להגדרת SI_n הינו ש $S\partial I_n$ מחזור.
אכן,

$$\partial(S\partial I_n) \underset{\text{לפי הנחת האינדוקציה S היא העתקת שרשראות על מימדים } < n \text{ ו} \partial I_n \text{ ממימד } n-1}{=} S\underbrace{\partial\partial I_n}_{=0} = 0$$

כלומר $S\partial I_n$ מחזור.

← נסמן ב b את מרכז Δ^n (פורמלית: $b=(\frac{1}{n+1},\dots,\frac{1}{n+1})$)
ונגדיר

$$SI_n := C_b(S\partial I_n)$$

($S\partial I_n$ הוא פרוק השפה  ו C_bC חיבור נק' שפה למרכז)

בפרט נקבל $\partial(SI_n) = S\partial I_n$

← כעת עבור X כלשהו ו $\sigma \in C_n(X)$ כלשהו, כיוון שאני מעוניינת בטבעיות אין ברירה אלא להגדיר

$$S(\sigma) = S\sigma_\#(I_n) = \sigma_\# S(I_n) \quad (= \sigma_\#(C_b(S\partial I_n)))$$

(א) נראה ש S העתקת שרשראות

$$\partial S(\sigma) = \partial\sigma_\# S(I_n) \underset{\text{העתקת שרשראות } \#}{=} \sigma_\# \partial S(I_n)$$

כיוון שהשוויון ידוע על I_n ←

$$\| $$

$$S\partial\sigma = S\partial\sigma_\#(I_n) \underset{\text{העתקת שרשראות } \#}{=} S\sigma_\# \underbrace{\partial I_n}_{\in C_{n-1}(\Delta^n)} = \sigma_\# S\partial I_n$$

מימד < n ולכן יש טבעיות מהאינדוקציה

(ב) נראה ש S טבעית

$$f_\# S\sigma \underset{\text{לפי הגדרת } S}{=} f_\#\sigma_\# SI_n$$

$$\|$$

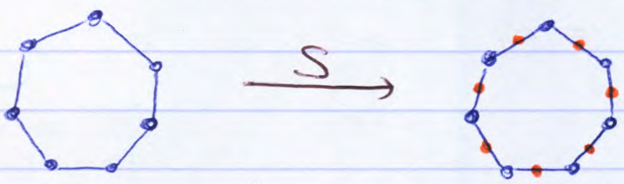
$$Sf_\#\sigma = S(f\circ\sigma) \underset{\text{הגדרת } S}{=} (f\circ\sigma)_\# S(I_n) = f_\#\circ\sigma_\# SI_n$$

24/4/12

5/8

$\Leftarrow$ קיבלנו $S: C_n(X)\to C_n(X)$ העתקת שרשראות טבעית שמממשת חלוקה בריצנטרית. (הודות ל C_n)
ולכן S משרה:

$$S_*: H_n(X)\to H_n(X)$$



<u>טענה</u>: S_* היא הזהות!
נוכיח זאת ע"י בניית הומוטופית שרשראות מ $\{S\}$ ל $\{id\}$
(זה בעצם מראה שהחלוקה ~~הזו~~ S שומרת תכונות ולא הורסת את ההומולוגיה)

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] \\
C_{n+1}(X) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "id"'] \arrow[d] & C_{n+1}(X) \arrow[d] \\
C_n(X) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "id"'] \arrow[d] \arrow[ur, "T"] & C_n(X) \arrow[d] \\
C_{n-1}(X) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "id"'] \arrow[d] \arrow[ur, "T"] & C_{n-1}(X) \arrow[d] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

רוצים $T: C_n(X)\to C_{n+1}(X)$
המקיימת ⓐ $\partial T+T\partial = S-Id$
ⓑ T טבעית

נבנה באינדוקציה על n
<u>בסיס</u> לפתור!
<u>הנחה</u> נניח שקיימת T כנ"ל ל $k<n$
<u>עבור n</u> ראשית נגדיר TI_n כך שיתקיים

$$\partial TI_n + T\partial I_n = SI_n - I_n$$

ידועים: I_n, SI_n ו $T\partial I_n$ מוגדר כי ∂I_n ממימד $<n$.
נרצה להגדיר את TI_n באופן שהשפה שלו תהיה

$$\circledast = -T\partial I_n + SI_n - I_n \in C_n(\Delta^n)$$

Δ^n קמורה ולכן $\circledast$ היא שפה אמ"מ היא מחזור
נבדוק ש $\circledast$ מחזור:

$$\partial(-T\partial I_n + SI_n - I_n) = -\partial T(\partial I_n) + \partial SI_n - \partial I_n =$$

$\in C_{n-1}(\Delta^n)$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה

$$= \overbrace{\left(T\partial(\partial I_n) - \underbrace{S(\partial I_n)}_{= \cancel{\partial S I_n}} + \cancel{\partial I_n}\right)} + \cancel{\partial S I_n} - \cancel{\partial I_n} = 0$$

מהבניה של S כי היא העתקת שרשראות.

24/4/12

6/8

⇐ לכן ניתן להגדיר: $T I_n := C_b(-T\partial I_n + S I_n - I_n)$

נרחיב ע"י טבעיות כדי ש-T יהי' טבעי נכפה עלינו להגדיר

עבור מ"ט X כלשהו ו-$\sigma \in C_n(X)$ כלשהו

$$T\sigma := T(\sigma_\# I_n) = \sigma_\#(T I_n)$$

א) נבדוק ש-T הומוטופית שרשראות

$$\partial T\sigma + T\partial\sigma \underset{(\text{לפי הגדרת } T)}{=} \partial\sigma_\# T I_n + T\partial(\underbrace{\sigma_\# I_n}_{\sigma}) \underset{\substack{\#\ \text{העתקת}\\ \text{שרשראות}}}{=} \sigma_\# \partial T I_n + T\sigma_\# \underbrace{\partial I_n}_{\substack{\text{ממימד}\\ \text{נמוך יותר}\\ \text{ולכן יש טבעיות}}} =$$

$$= \text{—"—} + \sigma_\# T\partial I_n = \sigma_\#(\partial T I_n + T\partial I_n) \underset{\substack{\text{שוויון ידוע}\\ \text{על } I_n!}}{=} \sigma_\#(S I_n - I_n) =$$

$$\underset{\substack{\text{טבעיות}\\ \text{של } S}}{=} S\sigma_\# I_n - \sigma_\# I_n = S\sigma - \sigma = S(\sigma) - Id(\sigma)$$

ב) נבדוק ש-T טבעית (לצורך המשך האינדוקציה)

$$f_\# T\sigma = f_\#(\sigma_\# T I_n) = f_\#\sigma_\# T I_n$$

$$\parallel$$

$$T f_\#\sigma = T(f\circ\sigma) = (f\circ\sigma)_\# T I_n$$

$\blacksquare$ סוף

נשים לב: כאשר לוקחים סימפלקס ומבצעים חלוקה בריצנטרית המחוברים הקטנים כבר לא סימפלקסים סטנדרטיים לכן צריך להשתכנע שבחלוקה הקוטר קטן

תרגיל

$\left[\mathrm{diam} A = \max_{x,y\in A}\{|x-y|\}\right]$

א) אם A סימפלקס כלשהו ו-$d = \mathrm{diam} A$ אז קיימים 2 קודקודים a,b של A כך ש-$d=$ מרחק בין a ו-b.
(כלומר קוטר של סימפלקס ממומש בזוג קודקודים)

ב) הראו שקיים קבוע $c<1$ שתלוי רק ב-n, כך שאם A סימפלקס n ממדי כלשהו (לאו דווקא סימפלקס סטנדרטי) אז כל חתיכה B בחלוקה הבריצנטרית של A מקיימת:

$$\mathrm{diam} B \le c\cdot \mathrm{diam} A$$

⇐ אז אם נחלק מספיק פעמים ניתן להגיע לכך שקוטר כל החתיכות קטן מ-ε.

24/4/12

7/8

הגדרה: התומך של סימפלקס סינגולרי הוא תמונתו. התומך של שרשרת הוא איחוד התומכים של הסימפלקסים הסינגולריים שמשתתפים בשרשרת (עם מקדם $\neq 0$)

כלומר: $\sigma : \Delta^n \to X$ אז $\mathrm{supp}\,\sigma := \sigma(\Delta^n) \subseteq X$

נשים לב שלכל $a \in C_n(X)$: (a שרשרת)

$$\mathrm{supp}\, S(a) \subseteq \mathrm{supp}\, a$$
$$\mathrm{supp}\, T(a) \subseteq \mathrm{supp}\, a$$

(למשל מתקיים שוויון)

למה? מהגדרת S:	$S\sigma = \sigma_\# S I_n$
נניח $SI_n = \sum p_i$ אז	$S\sigma = \sum \sigma \circ p_i$
אבל $\mathrm{Im}\,\sigma \circ p_i \subseteq \mathrm{Im}\,\sigma$	וכדומה עבור T

הגדרה: אוסף תתי קבוצות $\{A_\alpha\}$ של מ"ט X יקרא כיסוי טוב של X אם $\bigcup_\alpha \mathring{A}_\alpha = X$

[מעין הכללה לכיסוי הפתוח - אך לא דורשים שהקבוצות תהיינה פתוחות.]

← יהי $A = \{A_\alpha\}$ כיסוי טוב של X

נאמר שסימפלקס סינגולרי σ מכבד את A אם $\mathrm{supp}(\sigma)$ מוכל באחת מהקבוצות A_α

נאמר ששרשרת $a = \sum n_i \sigma_i$ $(n_i \neq 0)$ מכבדת את הכיסוי אם כל σ_i מכבד את הכיסוי.

נגדיר
$$C_n^A(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{אוסף כל השרשראות ב } C_n(X) \\ \text{שמכבדות את } A \end{array} \right\}$$

הוא תת"ח של $C_n(X)$.

← מתקיים: $\partial\left(C_n^A(X)\right) \subseteq C_{n-1}^A(X)$

כי אם σ מכבד את הכיסוי אז גם $\sum(\pm)\sigma \circ \varepsilon_i$ מכבד כיסוי

24/4/12

8/8

$\Leftarrow$ כך מוגדר קומפלקס שרשראות <u>חדש</u>

$$\cdots \to C_n^A(X) \to C_{n-1}^A(X) \to C_{n-2}^A(X) \to \cdots$$

את ההומולוגיה של קומפלקס זה

נסמן: $H_n^A(X)$

נוכיח $H_n^A(X) \cong H_n(X)$ (*)

נובע מכך שאם נקח שרשרת לא מרבדת: אחרי הפעלת S מספיק פעמים נקבל שרשרת שכן מרבדת שתהיה <u>הומולוגית</u> לשרשרת המקורית.
כלומר: לכל מחזור יש k כך שבהפעלת S k פעמים תתן שרשרת מרבדת.

((*) זהו איזו' ולא שוויון
ב $H_n^A(X)$ יש מח' הומולוגיה <u>מצומצמים</u> לאיברים שמרכבים את A. כלומר יש <u>פחות</u> איברים במחלקות השקילות.)

תוספת הסבר: על סימפלקס

מה זה סימפלקס? אנחנו הגדרנו את הסימפלקס ה n-מימדי

הגדרנו את הסימפלקס הסטנדרטי

$$\Delta^n = \{ (t_0,t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} : t_i\geq 0 \quad \sum t_i = 1 \}$$

אבל כשמחלקים (כמו בהרצאה) מקבלים סימפלקסים קצת אחרים.

לשם כך נדבר קצת על תלות אפינית.

ראשית ניתן דוגמאות:

2 נק' ב $\mathbb{R}^3$ > 2 וקטורים שפורשים מרחב דו מימדי
מגדיר ישר העובר דרכם.

3 נק' ב $\mathbb{R}^3$ > 3 וקטורים שפורשים את כל $\mathbb{R}^3$
מגדירים מרחב (דו מימדי) העובר בשלושתם

איפה ההבדל?

אם יש לנו 2 נק' a,b

הישר שעובר דרך 2 הנק' זה $ta+sb$ כך ש $t+s=1$

(לעומת המישור שהן פורשות שהוא כל דורש)

נק' בלתי תלויות אפינית

2 נק' הן בלתי תלויות אפינית אם הן שונות

3 נק' הן בלתי תלויות אפינית אם הנק' השלישית לא נמצאת בישר העובר דרך שאר 2 הנקודות

- כלומר הישרה הנפרשת ע"י הנק' לא נפרשת ע"י פחות נקודות.

ובאופן כללי - k נק' שמוסיפים הינן בלתי תלויה אפינית אם הינן לא קומבינציה לינארית של הנק' הקודמות כך שסכום המקדמים הוא 1. $\leftarrow$ כלומר שהנקודה לא נמצאת ב span האפיני של שאר הנקודות.

(בשונה מ span אפיני, ששם אין תנאי על המקדמים)

קמור של נק' בלתי תלויות אפינית: הינו ה span האפיני עם מקדמים בלתי שליליים.

ועכשיו...

הגדרה סימפלקס n מימדי הוא הקמור של n+1 נקודות בלתי תלויות אפינית.

הסימפלקס הסטנדרטי קדקודיו הם הנק' הסטנדרטיות: איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{n+1}$ שהם בת"ל אפינית

נק' בריצנטרית (נק' המרכז)
בהינתן קדקודים $a_0, \ldots, a_n$

הקמור (Convex Hull) שלהן הוא כאמור
$$CH(a_0, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i \; : \; t_i \geq 0 \, , \, \sum t_i = 1 \right\}$$

אז הנק' הבריצנטרית היא
$$b\Big(CH(a_0, \ldots a_n)\Big) = \frac{1}{n+1} a_0 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n$$

(במשולש זה יוצא מפגש התיכונים)

תרגיל בלינארית יש הגדרה רצו של בת"ל:
$\sum a_i v_i = 0 \Leftarrow a_i = 0$
מצאו משהו דומה עבור אי תלות אפינית.

הרצאה 5 - 2/5/12

חזרה: ראינו העתקה $S: C_n(X) \to C_n(X)$ המממשת חלוקה בריצנטרית וראינו שהיא משרה על ההומולוגיה היא הזהות
$Id = S_*: H_n(X) \to H_n(X)$

הגדרנו $\mathcal{A}=\{A_\alpha\}$ כיסוי טוב אם $\bigcup \mathring{A}_\alpha = X$

הגדרנו $C_n^{\mathcal{A}}(X)$ וראינו ש-∂ מוגדרת עליהם ולכן יש הומולוגיה $H_n^{\mathcal{A}}(X)$.

$C_n^{\mathcal{A}}(X) \subseteq C_n(X)$ ולכן יש העתקת ההכלה $i: C_n^{\mathcal{A}}(X) \to C_n(X)$
והיא משרה הומו' $i_*: H_n^{\mathcal{A}}(X) \to H_n(X)$

משפט: i_* זה הוא איזומורפיזם.

הוכחה:

i_* לוקחת מחזור שמכבד את הכיסוי וחושבת עליו כמחזור סתם.
$H_n^{\mathcal{A}}(X)$ הם מחזורים שמכבדים את הכיסוי עד כדי שפות שמכבדות את הכיסוי.

א) על i_*: יהי $[z]\in H_n(X)$ (כלומר $z\in Z_n(X)$) יש למצוא מחזור $w\in Z_n^{\mathcal{A}}(X)$ כך ש-$[z]=[w]$ ← (שוויון ב-$H_n(X)$! חסר משמעות ב-$H_n^{\mathcal{A}}(X)$ כי z לא נמצא שם).

$z=\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$ לכל $1\le i\le k$ נקבל כיסוי $\{\sigma_i^{-1}(A_\alpha)\}_{\alpha\in I}$
← זהו כיסוי טוב של הסימפלקס Δ^n.

[$\{\mathring{A}_\alpha\}$ כיסוי פתוח של X ולכן $\{\sigma_i^{-1}(\mathring{A}_\alpha)\}$ כיסוי פתוח של Δ^n
$\underbrace{\sigma_i^{-1}(\mathring{A}_\alpha)}_{\text{פתוחה}} \subseteq \sigma_i^{-1}(A_\alpha) \Rightarrow \sigma_i^{-1}(\mathring{A}_\alpha)\subseteq int(\sigma_i^{-1}(A_\alpha))$]

Δ^n מרחב מטרי קומפקטי לכן קיים $\varepsilon>0$ כך שכל תת קבוצה ב-Δ^n בקוטר $\le\varepsilon$ מוכלת באחת מן הקבוצות $\sigma_i^{-1}(A_\alpha)$

[משפט ε של לבג הוכח לכיסוי פתוח אך בודאי נכון גם לכיסוי טוב פשוט נמצא ε שמתאים לאוסף ה-Int-ים (הפנימיים)]

לכן, (לפי התרגול) יש m_i כך ש-m_i חלוקות בריצנטריות של Δ^n יתנו חלוקת סימפלקסים שקוטר כל אחד מהם קטן מ-ε.
(m_i צריך לקיים $c^{m_i}<\varepsilon$ כאשר c הקבוע מהתרגול (והוא תלוי ב-n))

ולכן: $S^{m_i}(\sigma_i)$ מכבד את הכיסוי.

לכל $1\le i\le k$ נקבל m_i כזה. נגדיר: $m=\max_{1\le i\le k}\{m_i\}$
ונקבל כי $S^m(\sigma_i)$ מכבד את הכיסוי (לכל i)
נסמן $w=S^m(z)$ אזי $w\in Z_n^{\mathcal{A}}(X)$ ו-$[w]=[z]$
(כי S משרה זהות על ההומולוגיה: $[z]=[Sz]=\dots=[S^m z]$)

2/5/12

2/8

ב) i_* חח"ע: נניח $z\in Z_n^A(X)$ מקיים שיש $a\in C_{n+1}(X)$ כך ש $\partial a=z$ (כלומר z שפה סתם)
צריך למצוא $b\in C_{n+1}^A(X)$ כך ש $z=\partial b$ (כלומר z שפה של מחובר מכבד כיסוי).

בדומה לחלק א: יש m מספיק גדול כך ש $S^m(a)$ מכבד את A

$$\partial S^m(a) = S^m(\partial a) = S^m(z)$$

קיבלנו $S^m(z)$ שפה ב $H_n^A(X)$ אבל אנחנו רוצים ש $\underline{z}$ תהיה שפה.
אמנם $z\sim S^m(z)$ אבל זו הומולוגיה ב $H_n(X)$ ולא ב $H_n^A(X)$
כלומר יש להראות עוד שהם הומולוגיים באופן שמכבד את הכיסוי.

ראינו ש
$$\begin{cases}\text{Supp}\, S\sigma \subseteq \text{Supp}\,\sigma\\ \text{Supp}\, T\sigma \subseteq \text{Supp}\,\sigma\end{cases}$$
← (ולכן אם σ מכבד כיסוי גם $S\sigma, T\sigma$ מכבדים כיסוי)

ולכן ניתן להגדיר:
$$S: C_n^A(X)\longrightarrow C_n^A(X)$$
$$T: C_n^A(X)\longrightarrow C_{n+1}^A(X)$$

והשוויונות של S ו-T עדיין מתקיימות שם. (כי זה נכון לכל שרשרת ובפרט לשרשראות מכבדות A)
ולכן $\partial T+T\partial = S-Id$ גם על $C_n^A(X)$
(אמרה הומוטופיית שרשראות T מראה ש $\{Id\}\sim\{S\}$ גם על $C_n^A(X)$)
ולכן אם $S^m z$ שפה בקומפלקס של הכיסוי אז $S^m z\sim z$ גם שפה בקומפלקס של הכיסוי.

— מש"ל —

<u>הערה</u> אם σ מכבד את A גם $S\sigma$ מכבד כי $\text{Supp}\,S\sigma\subseteq\text{Supp}\,\sigma\subseteq A_\alpha$
אמנם גם $\text{Supp}\,\sigma\supseteq\text{Supp}\,S\sigma$ אבל זה <u>לא</u> אומר שאם $S\sigma$ מכבד
אז גם σ מכבד. (כי שרשרת מכבדת אם כל מחובר מכבד <u>בנפרד</u>)
זה גם די הרעיון של S: כשה-σ לא מכבד מקצצים אותו עם S
עד שמקבלים משהו שכן מכבד.
למעשה, הגדרת Supp של שרשרת זה מיותר. לא השתמשנו בזה.

נחזור לשחק עם סדרות מדויקות...
ויש לנו קטגוריה — אובייקטים: קומפלקס שרשראות
מורפיזם: העתקת שרשראות (שהיא סדרה של העתקות)

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots\\
\downarrow & & \downarrow\\
A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1}\\
\downarrow & & \downarrow\\
A_n & \longrightarrow & B_n\\
\downarrow & & \downarrow\\
A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1}\\
\downarrow & & \downarrow\\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

נלביש על זה את המושג של סדרה מדויקת קצרה...

2/5/12

הגדרה סדרה מדויקת קצרה (סמ"ק) של קומפלקסי שרשראות היא

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

כך שהדיאגרמה מתחלפת

כל עמודה היא קומפלקס שרשראות

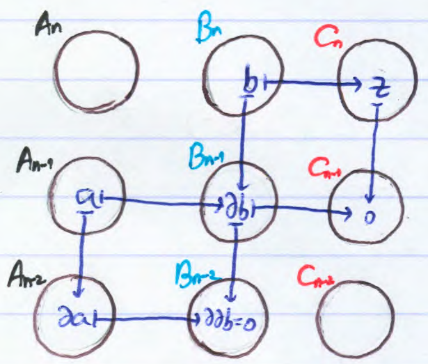
וכל שורה היא סדרה מדויקת

טענה סמ"ק משרה סדרה ארוכה מדויקת

$$\cdots \to H_nA \xrightarrow{f_*} H_nB \xrightarrow{g_*} H_nC \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}A \to \cdots$$

f_* משרה g_* משרה

והיא תהיה גם טבעית



נגדיר את Δ:

יהי $z\in C_n$ מחזור (מחפשים $a\in A_{n-1}$ מתאים)

$g:B_n\to C_n$ על ולכן יש $b\in B_n$ כך ש $f(b)=z$

כעת, כדי להראות שיש ב A_{n-1} מי שמכה ב ∂b

צריך להראות ש $g(\partial b)=0$ (סדרה מדויקת)

z מחזור ולכן $\partial z=0$.

מהתחלפות הדיאגרמה $g(\partial b)=0$.

כיוון שהסדרה מדויקת יש $a\in A_{n-1}$ כך ש $f(a)=\partial b$.

נוודא ש a מחזור (כלומר מייצג איבר בהומולוגיה) כלומר צריך $\partial a=0$

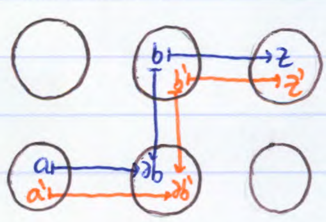
מהתחלפות הדיאגרמה $f(\partial a)=\partial\partial b=0$ אבל $f:A_{n-2}\to B_{n-2}$ חח"ע ולכן $\partial a=0$

נקבע: $\Delta(z)=a$

נרצה להראות ש Δ מוגדרת היטב על ההומולוגיה, כלומר ש Δ לא תלויה בנציג ולא תלויה בבחירות שעשינו בדרך:

נקח z' מאותה מח' הומולוגיה ($z\sim z'$)

ונבחר להם b,b' ו a,a' בהתאמה



צריך להראות $a\sim a'$ (כלומר שהפרשם שפה)

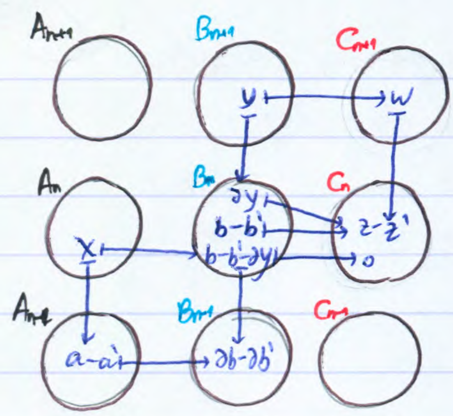
ברור ש $b-b' \xmapsto{g} z-z'$

$a-a' \xmapsto{f} \partial b-\partial b'$ (כי f, g הומומ')

$z\sim z'$ כלומר יש $w\in C_{n+1}$ כך ש $\partial w=z-z'$

2/5/12

4/8



$g:B_{n+1}\to C_{n+1}$ על ולכן יש $B_{n+1}\ni y \xmapsto{g} w$

מהתחלופיות הדיאגרמה $\partial y \xmapsto{g} z-z'$

יוצא ש $b-b'-\partial y \xmapsto{g} 0$

וכיוון שהסדרה מדויקת, יש

$A_n \ni x \xmapsto{f} b-b'-\partial y$

$$\partial(b-b'-\partial y)=\partial b-\partial b'-\underbrace{\partial\partial y}_{0}=\partial b-\partial b'$$

ושוב, מהתחלופיות הדיאגרמה: $\partial x \xmapsto{f} \partial b-\partial b'$

$f:A_{n-1}\to B_{n-1}$ חח"ע ולכן $\partial x=a-a'$ $\Leftarrow$ כלומר $a\sim a'$

- לגבי בחירה של b: זה טוב בהוכחה. פשוט נקח $z=z'$ אבל b,b' שונים.
- לגבי a: פה אין באמת בחירה כי f חח"ע.

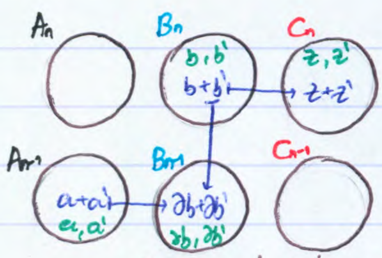
$\Leftarrow$ Δ מוגדרת היטב!

נראה ש Δ הומומו' של חבורות:

יהיו z,z' נציגים לשתים בהומולוגיה

נבחר, בנפרד ל z ול z', b,b' ו a,a' בהתאמה.

נעשה שוב הכל עבור $z+z'$ ונראה שנקבל משהו הומולוגי. יותר מזה? עם בחירה חכמה (והרי מותר לנו לבחור) זה יהיה שווה ממש. אכן:



$$\begin{tikzcd} & b+b' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z+z' \\ a+a' \arrow[r, mapsto] & \partial b+\partial b' & \end{tikzcd}$$

כלומר: $\Delta(z+z')=a+a'$

$\Leftarrow$ Δ נקרא הומומו' המקשר.

היפחה נראה ש $\cdots\to H_n(A)\xrightarrow{f_*}H_n(B)\xrightarrow{g_*}H_n(C)\xrightarrow{\Delta}H_{n-1}(A)\to\cdots$

הוא סדרה מדויקת.

ב $H_n(A)$

ב $H_n(B)$

ב $H_n(C)$

לשם כך צריך להראות שהסדרה מדויקת

א) דיוק ב $H_n(B)$

* $Im\subseteq Ker$ כלומר $f_*\circ g_*=0$. אלו העתקות המשרות מ f,g שמקיימות על הנציגים $f\circ g=0$ ולכן $f_*\circ g_*=0$
* $Ker\subseteq Im$ נניח יש $[z]\in H_nB$ כך ש $[z]\mapsto[0]$

(צריך להראות: יש משהו מ H_nA שהולך ל $[z]$)

$[z]\mapsto[0]$ $\Leftarrow$ z הולך לשפה ∂c $(c\in C_{n+1})$

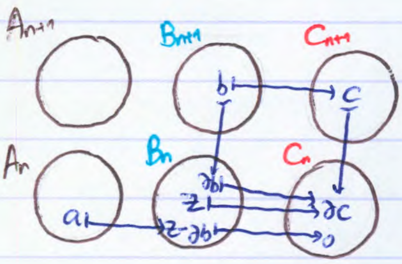
$g:B_{n+1}\to C_{n+1}$ על ולכן יש $B_{n+1}\ni b\xmapsto{g} c$

2/5/12

5/8

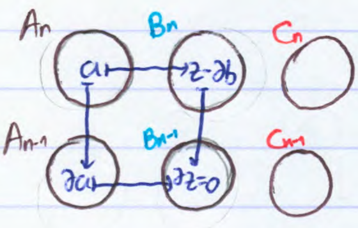
מהתחלופיות הדיאגרמה $\partial b \overset{g}{\mapsto} \partial c$ כלומר $z-\partial b \overset{g}{\mapsto} 0$

ולכן יש $a\in A_n$ כך ש $a \overset{f}{\mapsto} z-\partial b$.



נשים לב: $[z]=[z-\partial b]$

יש להראות ש a הוא מחזור:



$$\partial(z-\partial b)=\underbrace{\partial z}_{\text{מחזור}}-\partial\partial b=0$$

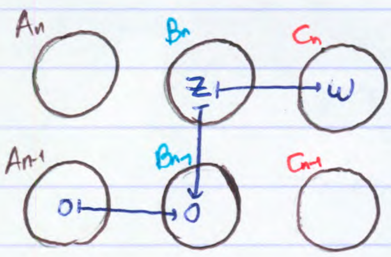
ומהתחלופיות הדיאגרמה $\partial a \overset{f}{\mapsto} 0$

אבל f חח"ע ולכן $\partial a=0$

$\Leftarrow$ a מחזור.

וסה"כ: $[a] \overset{f_*}{\mapsto} [z]$

ב) דיוק ב $H_n(C)$



א) $Im\subseteq Ker$ מתחילים עם מחזור $z\in B_n$

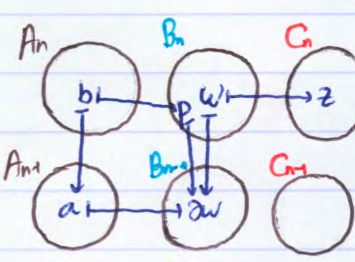
$z \overset{g}{\mapsto} w \in C_n$

נפעיל הומומ' המקשר על w:

נשתמש בחופש הבחירה כדי לבחור את z כמקור של w.

$\partial z=0$! $0\overset{f}{\mapsto}0$ ולכן $w\overset{\Delta}{\mapsto}0$

(זה בלתי תלוי בנציג ולכן גם אם היינו בוחרים מישהו אחר (לא z) היינו מקבלים משהו במחלקה של 0.)



א) $Ker\subseteq Im$ נניח $z\in C_n$ מחזור כך ש $\Delta(z)=[0]$. (יש להראות שיש ל z מקור ב B_n)

נקח בחירה $w \mapsto z$, $w\mapsto\partial w$, $a\mapsto\partial w$ (לפי הגדרת Δ)

$\Delta(z)=[0]$ כלומר $a=\partial b$ לאיזשהו $b\in A_n$

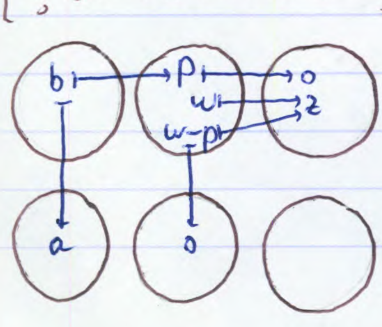
נסמן $f(b)=p\in B_n$

מהתחלופיות הדיאגרמה: $\partial p=\partial w$

אם כן, $\partial(p-w)=0$ ← $p-w$ מחזור

מתקיים $b\overset{f}{\mapsto}p\overset{g}{\mapsto}0$, $w\overset{g}{\mapsto}z$ ולכן $w-p\overset{g}{\mapsto}z$

[הערה לא נכון $[w]\mapsto[z]$ אמנם g על (וכנראה הנחתי ש a שפה מיותר) אבל w לא בהכרח מחזור!]



כלומר $[p-w]\overset{g_*}{\mapsto}[z]$

ג) דיוק ב $H_n(A)$ תרגיל לבית!

=תשל=

2/5/12

6/8

⊛ נדחה את העיסוק בטבעיות...

<u>בניה</u>

יהי $\{A,B\}$ כיסוי טוב של X (כלומר $A^\circ \cup B^\circ = X$, $A,B\subseteq X$)

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "k"] & \\ A\cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

i,j,k,l העתקות הכלה.

נבנה סדרה קצרה מדויקת של קומפלקסי השרשראות הבאים:

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & C_{n+1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}(A)\oplus C_{n+1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}^{\{A,B\}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_n(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & C_n(A)\oplus C_n(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_n^{\{A,B\}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

— מהן העתקות השפה?

$C_{n+1}(A\cap B) \xrightarrow{\partial} C_n(A\cap B)$ #

∂ הרגילה

$C_{n+1}(A)\oplus C_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial\oplus\partial} C_n(A)\oplus C_n(B)$ #

$(a,b)\mapsto(\partial a,\partial b)$

$C_{n+1}^{\{A,B\}}(X) \to C_n^{\{A,B\}}(X)$ #

∂ הרגילה (שומרת על הכיסוי)

— מהן ההעתקות לרוחב?

$C_n(A)\oplus C_n(B)\to C_n^{\{A,B\}}(X)$ #

$(a,b)\longmapsto a+b$ או ליתר דיוק: $(a,b)\mapsto k_\#(a)+l_\#(b)$

שימו לב ש $a+b$ מכבד את הכיסוי (כי $\operatorname{supp} a\subseteq A$, $\operatorname{supp} b\subseteq B$)

$C_n(A\cap B)\to C_n(A)\oplus C_n(B)$ #

$c\longmapsto(c,-c)$ או ליתר דיוק $c\mapsto(i_\#(c),-j_\#(c))$

[⊛ המינוס נדה רק בשביל הדיוק של הסדרה. אפשר גם $c\mapsto(c,c)$ אבל אז דריך $(a,b)\mapsto a-b$]

— נראה שזו סדרה מדויקת:

⊛ $c\mapsto(c,-c)$ חח"ע כי $i_\#$, $j_\#$ חח"ע

⊛ $(a,b)\mapsto a+b$ על כי כל שרשרת שמכבדת את הכיסוי יש לה חלק מהמחוברים עם $\operatorname{Supp}\subseteq A$ וחלק עם $\operatorname{supp}\subseteq B$ נפריד אותם וזה יהיה המקור.

(וגם להיות משפט ב $A\cap B$ אבל זה לא משנה יש כמה מקורות. העיקר שקיים)

2/5/12

(*) $c \mapsto (c,-c) \mapsto c-c=0$ ולכן $\mathrm{Im} \subseteq \mathrm{Ker}$

(*) נניח $(a,b) \mapsto 0$ (צ"ל שיש מקור ב $C_n(A\cap B)$)

$\Leftarrow$ $a+b=0$ $\Leftarrow$ $a=-b$

$\mathrm{supp}\,a \subseteq A$, $\mathrm{supp}\,b \subseteq B$ (מהגדרת a,b) אבל כדי ש $a=-b$

צריך שהתומכים יהיו מוכלים באותו מקום ולכן $\mathrm{supp}\,a, \mathrm{supp}\,b \subseteq A\cap B$

נבחר $c:=a$: $c \mapsto (c,-c) = (a,-a) = (a,b)$ ולכן $\mathrm{Ker} \subseteq \mathrm{Im}$.

– נראה שהדיאגרמה מתחלפת (ההעתקות שהראינו)

(*)
$$\boxed{\begin{array}{l} c \\ \downarrow \\ \partial c \mapsto (\partial c, -\partial c) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} c \mapsto (c,-c) \\ \downarrow \\ (\partial c, -\partial c) \end{array}}$$

(*)
$$\boxed{\begin{array}{l} (a,b) \\ \downarrow \\ (\partial a, \partial b) \mapsto \partial a + \partial b \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} (a,b) \mapsto a+b \\ \downarrow \\ \partial a + \partial b \end{array}}$$

← נקבל סדרה ארוכה מדויקת

$$\cdots \to H_n(A\cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n^{\{A,B\}}(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A\cap B) \to \cdots$$

וכזכור: $H_n^{\{A,B\}}(X) \cong H_n(X)$ (כיון שהשרשראות מוגדרות מספיק יפה לפרשנות שלנו אז גם ההומולוגיה תפרק)

משפט

$$\cdots \to H_n(A\cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A\cap B) \to \cdots$$

היא סדרה ארוכה מדויקת וטבעית.

← זוהי סדרת מאייר וייטוריס

[או בעברית: מאייר והטורים Ü]

(#) קיימת גם סדרה כזאת עבור ההומולוגיה המצומצמת (אבל אז נדרש להניח ש $A\cap B \neq \emptyset$)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C_0(A\cap B) & \to & C_0(A)\oplus C_0(B) & \to & C_0^{\{A,B\}}(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon\times\varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$n \mapsto (n,-n)$, $(m,n) \mapsto m+n$

בדוק שבשורות הכל מדויק ומתחלף...

2/5/12

8/8

נראה הכללה של משפט ון קמפן:

כאשר $A\cap B \neq \emptyset$ וקשירה מסילתית, אזי בהומולוגיה מדויקת
של הסדרה תראה כך:

$$H_1(A\cap B) \to H_1(A)\oplus H_1(B) \to H_1(X) \to \tilde{H}_0(A\cap B) \overset{\text{כי } A\cap B \text{ קשיר מסילתית}}{=} 0$$

$\Leftarrow$ $H_1(A)\oplus H_1(B) \to H_1(X)$ הינו <u>על</u>

אזי לפי נתר: $\frac{H_1(A)\oplus H_1(B)}{\ker} \cong H_1(X)$

כלומר מזהים את כל השוברים מהצורה $(i_\#(c), -j_\#(c)) \sim 0$

כלומר $(i_\#(c),0)\sim(0,j_\#(c))$ $\longleftarrow$ וזה בדיוק היחס בון קמפן!

$$\pi_1(X) \cong \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N\left(i_*(c)\, j_*(c)^{-1}\right)}$$

1/7

הרצאה 6 - 9/5/12

$A,B\subseteq X$
$\mathring{A}\cup\mathring{B}=X$

__תזכורת__ הוכחנו את קיום הסדרה של מאייר ויאטוריס

$$\cdots\to H_n(A\cap B)\to H_n(A)\oplus H_n(B)\to H_n(X)\xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A\cap B)\to\cdots$$

היום נראה שימושים של זה.

__משפט__ $\tilde H_k(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$

[עבור $n>0$: $H_k(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & k=0,n\\ 0 & k\neq 0,n\end{cases}$]

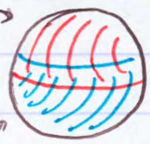
__הוכחה__ באינדוקציה על n

__$n=0$__ $H_k(S^0)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\tilde H_k(S^0)=\begin{cases}\mathbb{Z} & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$

(זה הוא 2 נקודות
ספרה של דוחק 1 ממדי
$S^0=\{x\in\mathbb{R}^1:\ |x|=1\}$)

__נניח__ עבור ספירות ממימד $<n$.

עבור ספירה ממימד $n>0$ נבחר כיסוי



$A\simeq *$, $B\simeq *$ (שקולים הומוטופית לנקודה)

$A\cap B\simeq S^{n-1}$!

ולכן הסדרה הופכת ל

$$\to\tilde H_k(A)\oplus\tilde H_k(B)\to\tilde H_k(S^n)\to\tilde H_{k-1}(A\cap B)\to\tilde H_{k-1}(A)\oplus\tilde H_{k-1}(B)\to\cdots$$

$$\cdots\to 0\oplus 0\to\tilde H_k(S^n)\to\tilde H_{k-1}(S^{n-1})\to 0\oplus 0\to\cdots$$

כיוון שהסדרה מדויקת זהו __איזו'__ $\tilde H_k(S^n)\cong\tilde H_{k-1}(S^{n-1})$

ומכאן לפי הנחת האינדוקציה.

[עבור $k=0$: אפשר לחשוב שהסדרה ממשיכה עם אפסים עד לאינסוף
או לחשוב שזה מרחב פשוט קשר ולכן $\tilde H_0(S^n)=0$]

— משל —

__מסקנה 1__ עבור $n\neq m$ $S^n\not\simeq S^m$, ובפרט $S^n\not\cong S^m$.

__מסקנה 2__ עבור $n\neq m$ $\mathbb{R}^n\not\cong\mathbb{R}^m$

[$\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^m$ כי כולם שקולים הומוטופית לנקודה]

__הוכחה__ נניח בשלילה שיש הומאו' $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

נביט בהומאו' המצומצם: $h|_{\mathbb{R}^n-\{0\}}:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}^m-\{h(0)\}$

$\mathbb{R}^n-\{0\}\simeq S^{n-1}$, $\mathbb{R}^m-\{h(0)\}\simeq S^{m-1}$

אז נקבל $S^{n-1}\simeq S^{m-1}$ __סתירה__!

משפט $\partial D^n \subseteq D^n$ איננו נסג

הוכחה

נניח בשלילה שקיים $r: D^n \to \partial D^n$ כך ש $r \circ i = Id_{\partial D^n}$

אזי $r_* \circ i_* = Id_{H_*(\partial D^n)}$ ← בפרט i_* חח"ע בכל מימד. (i הכלה)

אך במימד $k=n-1$ $\quad i_*: \underbrace{\tilde H_{n-1}(\partial D^n)}_{\mathbb{Z}} \to \underbrace{\tilde H_n(D^n)}_{0}$

$(\partial D^n \simeq S^{n-1})$ $\quad$ (כי D^n כווץ)

אבל לא קיים הומומ' חח"ע $\mathbb{Z} \to 0$! סתירה!

■

משפט נק' השבת של בראואר

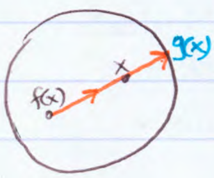
אם $f: D^n \to D^n$ אזי יש $a \in D^n$ כך ש $f(a)=a$

הוכחה

נניח בשלילה שקיים $f: D^n \to D^n$ כך ש $f(a) \neq a$ לכל $a \in D^n$

ונבנה העתקה חדשה $g: D^n \to \partial D^n$

באופן הבא: בהינתן $x \in D^n$



מותחים קרן מ $f(x)$ שעוברת דרך x (מוגדר כי $x \neq f(x)$)

הנק' בה הקרן חותכת את השפה תוגדר להיות $g(x)$

← g רציפה (תרגיל!)

ובנוסף. g מקיימת $g(a)=a$ לכל נק' בשפה $a \in \partial D^n$

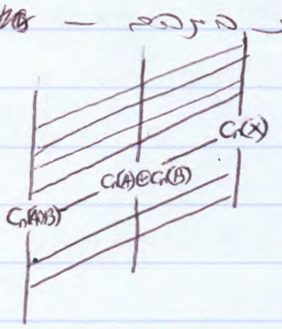
סתירה! (כי הראינו במשפט הקודם שלא קיימת נסיגה כזאת)

■

על הטבעיות של סדרת מאייר ויטוריס

בניין קומפלקסי שרשראות והעתקות שרשראות ביניהם — סמ"ק

לכל מ"ט X בניין סמ"ק:

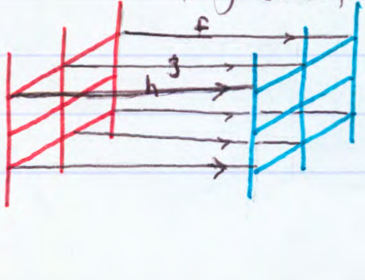


אם היו לנו 2 אובייקטים כאלה (סמ"ק)

העתקה טבעית ביניהם היא סדרת העתקות בין המלבנים

כך שהדיאגרמה מתחלפת

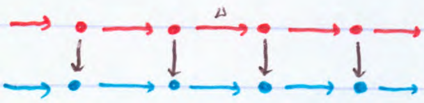
(כלומר כל מלבן אופקי ואנכי מתחלפים)



9/5/12

3/7

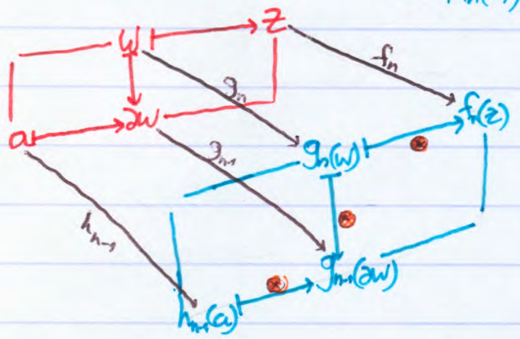
כל אחד מהסמ"קים מספק סדרה ארוכה מדויקת, ההומומ' בינהם משרה הומומ' על ההומולוגיות:



נשאר שההומומ' המושרה מתחלף ← זו תכונת הטבעיות של הסדרה.
כל הריבועים זה ברור שכן הנחנו שהעתקות (f,g,h) מתחלפות עם העתקות של הסמ"ק (הנחנו מלבנים אנכיים נוספים מתחלפים).
יש לבדוק את:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to & H_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A\cap B) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H_n(Y) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(C\cap D) & \to \cdots
\end{array}$$

נניח: $[a] \overset{\Delta}{\longmapsto} [z]$, מתקיים:



⊛ ← מהתחלפות המלבנים
ולכן כל הריבועים מתחלפים

← מה זה אומר על סדרת מאייר ויאטוריס?
יהי X עם כיסוי $\{A,B\}$ ומרחב Y עם כיסוי $\{C,D\}$
אם יש $f: X \longrightarrow Y$
כך ש
$$\begin{cases} f(A)\subseteq C \\ f(B)\subseteq D \end{cases}$$
נאמר f מכבד את הכיסויים (הכרחי כדי שיהיה מוגדר על הסמ"ק)

אזי גם $f(A\cap B)\subseteq C\cap D$
ו-f תשרה העתקות $f_\#$ בין הסמ"ק של X לסמ"ק של Y
כך שכל המלבנים מתחלפים.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & C_n(A\cap B) & \to & C_n(A)\oplus C_n(B) & \to & C_n^{\{A,B\}}(X) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C_n(C\cap D) & \to & C_n(C)\oplus C_n(D) & \to & C_n^{\{C,D\}}(Y) & \to 0
\end{array}$$

אזי יש הומומ' בין הסדרות המדויקות שהינו טבעי.
(הטבעיות תעזור לנו להוכיח דברים על העתקות של מרחבים).

9/5/12

<u>בנייה</u>

לכל $1\le k\le n+1$ נגדיר $R_k: S^n \to S^n$

ע"י $R_k((x_1,\dots,x_{n+1})) := (x_1,x_2,\dots,-x_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1})$

זהו שיקוף של הספירה ברכיב ה-k.

נתבונן בהומומו' $R_{k_*}: \tilde H_n(S^n) \to \tilde H_n(S^n)$ (מעניין רק במימד ה n כשעבור המימדים האחרים $0\mapsto 0$)

<u>משפט</u> $R_{k_*} = -Id$

<u>הוכחה</u> באינדוקציה על n

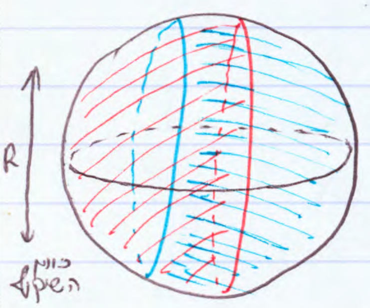
<u>עבור n=0</u> $S^0=\{p,q\}$ צורה כללית של מחזור: $mp-mq$ $m\in\mathbb{Z}$

$$R(p)=q \quad , \quad R(q)=p$$

$$R_*(mp-mq) = mq-mp = -(mp-mq)$$

<u>נניח</u>

<u>נוכיח</u>



נבחר כיסוי של 2 המיספרות (עם קצת חפיפה) בכוון <u>אחר</u> משל השיקוף. (כלומר נפריד בקואורדינטה אחרת - שאחרת R לא ישמר את הכיסוי וגם לא נוכל להשתמש בבסיס האינדוקציה כי בקו המשווה R_* ~~יהיה~~ יהיה הזהות.)

$$\begin{array}{ccccccc} 0\oplus 0 & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(\underbrace{A\cap B}_{\cong S^{n-1}}) & \longrightarrow & 0\oplus 0 \\ & & \downarrow R_* & & \downarrow R_* & & \\ 0\oplus 0 & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(A\cap B) & \longrightarrow & 0\oplus 0 \end{array}$$

R_* מבצע שיקוף גם על $A\cap B \cong S^{n-1}$ (נק' חשובה) ולכן מהנחת האינדוקציה

$$-Id = R_*: H_{n-1}(A\cap B) \to H_{n-1}(A\cap B)$$

גם ידוע: $H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(A\cap B)$ נסמן איזו' זה ב F.

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "F\cong"] \arrow[d, "R_*"'] & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[d, "R_*=-Id"] \\ H_n(S^n) \arrow[r, "F\cong"] & H_{n-1}(A\cap B) \end{tikzcd}$$

מהנחת האינדוקציה

<u>מטבעיות</u> ההומומו' המקשר : $R_*(a) = F^{-1}(-F(a)) = -a$

∎

9/5/12

5/7

מסקנה $R \not\sim Id$ (R לא הומוטופי לזהות)

כי אז $-Id_* = R_* = Id_*$ סתירה!

בניה נגדיר את העתקה האנטיפודית

$$A: S^n \longrightarrow S^n$$

ע"י: $A(v) = -v$

למעשה: $A = R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_{n+1}$

ולכן $\boxed{A_* = (-1)^{n+1} Id}$

מסקנה עבור n **זוגי** $A: S^n \to S^n$ מקיים: $A \not\sim Id$

טענה עבור n אי-**זוגי** $A: S^n \to S^n$ מקיים $A \sim Id$

הוכחה

מה מיוחד ב-n אי זוגי? $n = 2k-1$

ניתן לחשוב על S^n כספירת היחידה ב-$\mathbb{C}^k$

יש שימור הנורמה, מובטח המ"ש!

(מזהים $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$ (גם במכפלה פנימית טבעית ונורמה) ספירת היח' ב-$\mathbb{C}^k$ היא בדיוק S^{2k-1})

ויש הומוטופיה נוחה: $H(v,t) = e^{i\pi t} \cdot v$ $0 \le t \le 1$

(מתחיל ב-v ונע ברציפות בחצי מעגל היח' ל-v-).

∎

טענה יהיו $f, g: S^n \longrightarrow S^n$

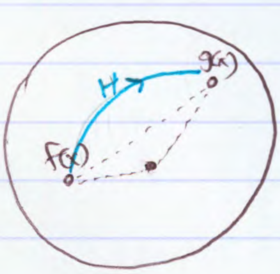
אם $f(x) \neq -g(x)$ לכל $x \in S^n$ אז $f \sim g$

הוכחה

$f(x) \neq -g(x)$ אזי הקטע המחבר אותם ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ לא עובר בראשית.

נגדיר

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)f(x) + t\,g(x)\|}$$



(מסלול על הספירה מ-f(x) ל-g(x) תמונה של הקו הישר ביניהם)

∎

9/5/12

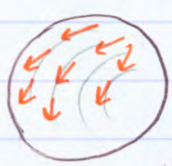
6/7

<u>מסקנה</u> $f: S^n \to S^n$ אם n זוגי אזי
ויש $x\in S^n$ כך ש $f(x)=x$
או יש $x\in S^n$ כך ש $f(x)=-x$

<u>הוכחה</u>
בשלילה, לכל $x\in S^n$ $f(x)\neq x$ וגם $f(x)\neq -x$.
כלומר $f(x)\neq -A(x)$, $f(x)\neq -Id(x)$
<u>לפי</u> $\Leftarrow$ $f\sim A$, $f\sim Id$ $\Leftarrow$ $Id\sim A$ סתירה! ∎

(#) עבור n אי זוגי זה לא נכון!
<u>כי</u> $n=2k-1$ נחשוב על S^n כספירת היח' ב $\mathbb{C}^k$.
אז יש העתקה $v\mapsto i\cdot v$ ($t=\frac{1}{2}$ בהומוטופיה שמצאנו ל $A\sim Id$)
העתקה זו מקיימת $\begin{cases} v\not\mapsto v \\ v\not\mapsto -v\end{cases}$ לכל v
(<u>תרגיל</u>: תרגמו לקואורדינטות ממשיות)

<u>הגדרה</u> $f:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ נקראת שדה וקטורי אם $v\perp f(v)$ לכל $v\in S^n$



<u>משפט</u> עבור n זוגי לא קיים שדה וקטורי על S^n שאיננו מתאפס בשום מקום.
<u>נוסח שקול</u> אם n זוגי אז לכל שדה וקטורי f על S^n יש $v\in S^n$ כך ש- $f(v)=0$.
(אי אפשר "לסרק" את הספירה תמיד תהיה נק' שקט שמסתובבת)

<u>הוכחה</u> נניח בשלילה f שדה וקטורי שלא מתאפס בשום מקום
נגדיר $g:S^n\to S^n$ ע"י: $g(x)=\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$
(g מוגדר כי f לא מתאפס)
כיוון שלכל x: $f(x)\perp x$ אז גם $g(x)\perp x$
<u>בסתירה</u> למסקנה שקיים x כך ש $g(x)=x$ או $g(x)=-x$. ∎

(#) זה לא נכון עבור ספירות ממימד אי זוגי! $n=2k-1$
שוב נחשב על S^n כספירת היח' ב $\mathbb{C}^k$, $f(v)=iv$
<u>תרגיל</u> $v\perp iv$ (לא במכפלה הסקלרית המרוכבת אלא במכפלה הסקלרית הממשית המתאימה לה)
אומנם, N להעתקה $(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)\sim(x_1+iy_1,\dots,x_k+iy_k)$

9/5/12

7/7

כפל ב i מזוהה עם $(-y_1+x_1 i, \dots, -y_k+x_k i) \sim (-y_1, x_1, -y_2, x_2, \dots, -y_k, x_k)$

וזה באמת ניצב לנק' המקוריות

$$(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \cdot (-y_1, x_1, \dots, -y_k, x_k) = -x_1 y_1 + y_1 x_1 - \dots - x_k y_k + y_k x_k = 0$$

$\blacksquare$

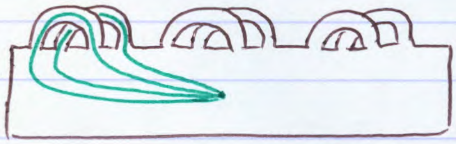
הרצאה 7 - 10/5/12

נשתמש בסדרת מייר וייטוריס לחישוב חבורות הומולוגיה של משטחים.
(*משטחים זה דוג' למקרים שצריך להבין את העתקות ההכלה כדי לפרש את ס' מייר וייטוריס.)

$nT = T\#T\#\cdots\#T$

נשתמש בכיסוי U, V:

$U \simeq *$

$V \cong$  $\simeq \bigvee_{2n} S^1$

לפי נסג עיוותי

$U \cap V \simeq S^1$

$3T$: 

מהתרגול: $\tilde{H}_k(\bigvee_n S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}^n & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$

נכתוב את ס' מייר וייטוריס

$$\cdots \to \underset{0}{H_3(U\cap V)} \to \underset{0}{H_3(U)} \oplus \underset{0}{H_3(V)} \to H_3(X) \to$$
$$\to \underset{0}{H_2(U\cap V)} \to \underset{0}{H_2(U)} \oplus \underset{0}{H_2(V)} \to H_2(X) \to$$
$$\to \underset{\mathbb{Z}}{H_1(U\cap V)} \xrightarrow{*} \underset{0}{H_1(U)} \oplus \underset{\mathbb{Z}^{2n}}{H_1(V)} \to H_1(X) \to$$
$$\to \underset{0}{\tilde{H}_0(U\cap V)} \to \underset{0}{\tilde{H}_0(U)} \oplus \underset{0}{\tilde{H}_0(V)} \to H_0(X) \to 0$$

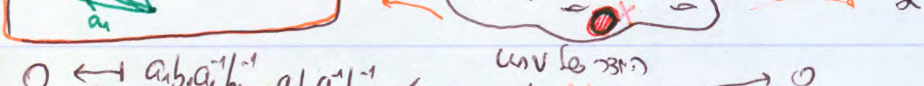
$0 \to H_3(X) \to 0 \Leftarrow H_3(X) = 0$

ובאותו אופן לכל $k \geq 3$

$0 \to \tilde{H}_0(X) \to 0 \Leftarrow \tilde{H}_0(X) = 0$

בשביל לחשב את $H_1(X)$ יש להבין את ההעתקה *
← אם נדע מה ההכלה הנו משרה ב π_1 אז נדע על H_1
למה? לא רק כי $Ab\pi_1 = H_1$ אלא כי זהו איזו' טבעי

נזכר:



$0 \longleftarrow a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1} \longleftarrow X \longmapsto 0$

אבליזציה

היוצר של $U\cap V$

10/5/12

$H_1(U\cap V) \xrightarrow{0} H_1(U) \oplus H_1(V)$ ולכן זו העתקת האפס!

($\overset{0}{H_1(U)}$, $\overset{\mathbb{Z}^{2n}}{H_1(V)}$)

<u>הערה</u>: כאשר העתקת האפס בתוך סדרה מדויקת

$\cdots \to A \xrightarrow{0} B \to \cdots$

אז בשביל הנוחיות ניתן לרשום $\to A \to 0 \to B \to \cdots$

ועדיין הסדרה מדויקת שכן $\to A$ עדיין על

$B \to$ עדיין חח"ע

אם כן $0 \to \mathbb{Z}^{2n} \to H_1(X) \to 0 \Rightarrow \boxed{H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2n}}$

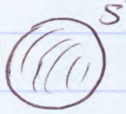
- $0 \oplus 0 \to H_2(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \Rightarrow \boxed{H_2(X) = \mathbb{Z}}$

<u>משטחים לא אוריינטביליים</u> - np

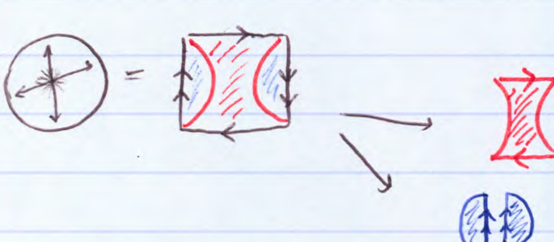
<u>תזכורת</u>

$$P := \mathbb{R}P^n = S^n / v\sim -v \cong D^n / \underset{\text{עם } v\in\partial D^n}{v\sim -v}$$

לפי

$D^n \cong$  $\xrightarrow{i\ \text{הכלה}}$  $S^n \xrightarrow{\text{מנה}} \mathbb{R}P^n$

(זהים על כל נק' אנטיפודליות יש נציג בהמיספירה)
והשוון העתקת מנה
ומזהים נק' רק מהשפה.

- $P =$ 

ויש הצגה נוספת:

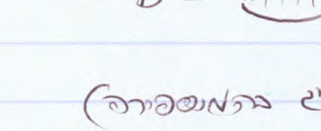
טבעת מביוס →

עיגול →

$\Leftarrow$ P זה הדבקה של מביוס ועיגול בשפתם.
(שים לב שהשפה של שניהם זה מעגל)

<u>חישוב</u> np מתפרק ל $U =$ דיסק $\simeq *$

$V =$ סכום קשיר של מביוסים



$\simeq \bigvee_n S^1$

← מהי ההכלה? היוצר של U אומר לשפה בV שזה אומרו
נוסע עיגוני: $a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2$ אומרי אבליזציה $1 \mapsto (2,2,\dots,2) \in \mathbb{Z}^n$

<u>תרגיל</u> חשבו את $\tilde{H}_k(\mathbb{R}P^n)$

10/5/12

משפט 1 אם $f: D^k \to S^n$ חח"ע (⊛ ⟸ שיכון)
אז $\tilde{H}_i\left(S^n - f(D^k)\right) = 0$ לכל i

הערות

⊛ **הגדרה** $f: A \to X$ נקראת שיכון אם ההעתקה $f: A \to f(A)$ המתקבלת ע"י צמצום הטווח הינו הומאו'

⊛ באופן כללי לא כל העתקה רציפה וחח"ע הינה שיכון (כי לאו דווקא ההעתקה ההפוכה תהיה רציפה)

דוגמא: $[0,1) \to \mathbb{R}^2$ התמונה הינו S^1 $[0,1) \not\cong S^1$

⊛ אצלנו זה למעשה שיכון כי D^k קומפקטי ו-S^n האוסדורף.

- למעשה, $k \le n$ (אחרת אין שיכון כזה) אבל את זה נראה בהמשך.

⊛ ב-S^2: אם נוציא מ-S^2 נקודה, קטע, דיסק,... המשלים כוויץ $(\cong \mathbb{R}^n)$
D^0 D^1 D^2

אבל במימד 3 ומעלה זה כבר לא תמיד נכון שהמשלים כוויץ.

הוכחה באינדוקציה על k

עבור $k=0$ D^0 הינו נק' בודדת ואז $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{*\}$
ולכן כל חב' ההומולוגיה מתאפסות

נניח נכון ל-D^k

נוכיח עבור D^{k+1} נציג את D^{k+1} כ- $D^{k+1} = D^k \times I$

הסבר $\underbrace{I^{k-1}}_{D^{k-1}} \times I = I^k \cong D^k$

הגדרה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקרא גוף קמור n-מימדי אם הוא:
(א) קמור (ב) קומפקט (ג) $\mathring{A} \neq \emptyset$

משפט כל הגופים הקמורים ה-n-מימדיים הומאו' זה לזה

רמז שיכון

10/5/12

בפרט נחשוב על I כ $[0,1]$: $D^{k+1} = D^k \times [0,1]$

נגדיר:

(← זה לא כיסוי טוב)

$$A_0 = D^k \times [0,\tfrac12] \qquad A_1 = D^k \times [\tfrac12, 1]$$

$$A_0 \cup A_1 = D^k \times [0,1]$$

$$A_0 \cap A_1 = D^k \times \{\tfrac12\}$$

נגדיר: $U, V \subseteq S^n - f(D^k \times I)$ פתוחים:

פתוחות כי $f(A_i)$ קב' קומפקטי במטריה קומפקטי ⇐ סגורות

$$\left.\begin{aligned} U &= S^n - f(A_0) \\ V &= S^n - f(A_1) \end{aligned}\right.$$

$$U \cup V = S^n - f(D^k \times \{\tfrac12\}) \longrightarrow f(A_0)^c \cup f(A_1)^c = (f(A_0) \cap f(A_1))^c$$

$$U \cap V = S^n - f(D^k \times I) \longrightarrow f(A_0) \cup f(A_1) \overset{\text{חח"ע}}{=} f(A_0 \cup A_1)$$

מהנחת האינדוקציה, ההומולוגיה של $U\cup V$ היא אפס בכל מימד?
(כי $D^k \times \{\tfrac12\} \simeq D^k$)
אנחנו מעוניינים בהומולוגיה של $U \cap V$
נרשום את ס' מאייר ויטוריס:

$$\dashrightarrow H_{i+1}(U\cup V) \to H_i(U\cap V) \to H_i(U) \oplus H_i(V) \longrightarrow H_i(U \cup V) \to \cdots$$

$$\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$\longleftarrow H_i(U\cap V) \longrightarrow H_i(U) \oplus H_i(V)$ הוא איזו!

$$[z] \longmapsto (i_*([z]), -j_*([z]))$$

(ההכלות הטבעיות $i: U\cap V \to U$, $j: U \cap V \to V$)

• כינויים זה לא עזר לנו. הרי גם U וגם V הם $S^n - f(D^{\text{מימד}})$

השלילה

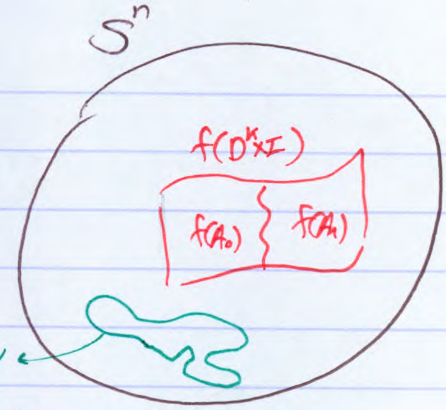
נניח בשלילה קיים $0 \neq [z] \in H_i(S^n - f(D^k \times I))$

$$[z] \longmapsto (i_*([z]), -j_*([z]))$$

כיוון שזה איזו' $0 \neq (i_*([z]), -j_*([z]))$

ולכן $0 \neq i_*([z])$ או $0 \neq j_*([z])$ (או שניהם)

בה"כ $i_*([z]) \neq 0$ כלומר z מחזור במשלים שהוא לא שפה של אף שרשרת במשלים של $f(A_0)$



מחזור שהוא לא שפה במשלים של $f(D^k\times I)$

$0\neq i_*([z])$ ⇐ לכן הוא עדין לא שפה גם במשלים של $f(A_0)$

(אמרנו שהיינו יכולים לחשוב שבמרחב יותר גדול יש שרשרת ש z השפה שלה)

נוכל לחלק את I כרצוננו ועדין z לא יהיה שפה

כלומר נוכל להסתכל על המשלים של

$U_1 = f(D^k\times[0,\frac{1}{2}])$

$U_2 = f(D^k\times[0,\frac{1}{4}])$

$U_3 = f(D^k\times[0,\frac{1}{8}])$

$\vdots$

⊗ תוספת הפרק כולל

(בכל שלב של החלוקה נקח U_i כך שההכלה אליו לא אפס
(בה"כ זה הקטע $[0,\frac{1}{2^k}]$)

כך ש<u>בכולן</u> z לא שפה.

החיתוך של כולם $D^k\times\{t\} = \bigcap D^k\times[0,\frac{1}{2^k}]$

ולכן $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = S^n - f(D^k\times\{t\})$

אבל לפי הנחת האינדוקציה ההומולוגיה שלו היא אפס

ולכן <u>שם</u> z <u>כן</u> אפס.

נסתכל על שרשרת n מימדית ב $S^n - f(D^k\times\{t\})$ כך ש z שפה שלה

$a = \sum n_j\sigma_j \in C_{i+1}(\bigcup_m U_m)$, $\partial a = z$

a סכום סופי של סימפלקסים סינגולריים

← $\mathrm{supp}\, a$ קומפקטי ולכן נמצא באיחוד <u>סופי</u> של הקב' U_m

כלומר $\mathrm{Supp}(a)\subseteq\bigcup_m U_m \xRightarrow{\text{קומפקטי}} \exists L: \mathrm{Supp}(a)\subseteq\bigcup_{1\le m\le L} U_m$

אבל בשלב ה L z עדין לא היה שפה סתירה!

— מ.ש.ל —

10/5/12

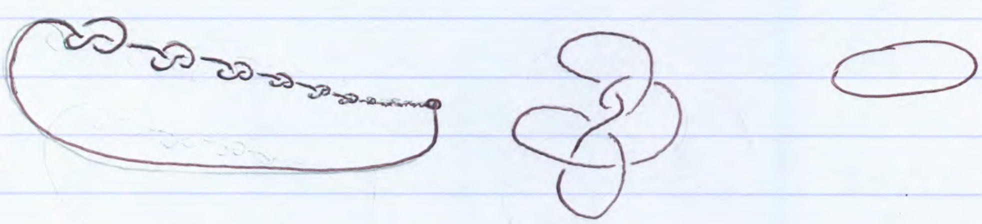
6/7

משפט 2 יהי $f:S^k\to S^n$ חח"ע (⇐ שיכון)

אזי $\tilde{H}_i(S^n-f(S^k))=\begin{cases}\mathbb{Z} & i=n-k-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

דוגמא 1 $n=3$, $k=1$ על S^3 אפשר לחשוב כ $\mathbb{R}^3$ שהדבקנו לו את ה-∞ לנקודה

שיכונים של S^1:



הוכחה באינדוקציה על k

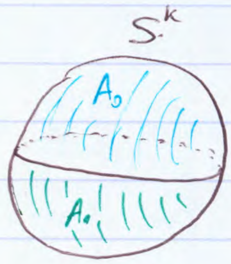
עבור $k=0$ $f:S^0\hookrightarrow S^n$, $\{p,q\}$

$$S^n-f(\{p,q\})\simeq\mathbb{R}^n-\{x\}\simeq S^{n-1}$$

$$\tilde{H}_i(S^n-f(S^0))=\tilde{H}_i(S^{n-1})=\begin{cases}\mathbb{Z} & i=n-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נניח נכון ל S^{k-1}

נוכיח ל S^k



$A_0=$ ההמיספרה העליונה של S^k $=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\in S^k:\ x_{k+1}\geq 0\}$

$A_1=$ ההמיספרה התחתונה של S^k $=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\in S^k:\ x_{k+1}\leq 0\}$

$A_0\cap A_1\cong S^{k-1}$ קו המשווה

נגדיר

$$U=S^n-f(A_0)$$
$$V=S^n-f(A_1)$$

$U\cup V=S^n-f(S^{k-1})$ ← יש לנו מהנחת האינדוקציה

$U\cap V=S^n-f(S^k)$ ← בזה אנחנו מתעניינים

10/5/12

7/7

$A_0,A_1 \cong D^k \xLeftarrow{\text{משפט 1}} \tilde{H}_i(V)=0,\ \tilde{H}_i(U)=0$ לכל i

$$\cdots \to H_i(U)\oplus H_i(V) \to H_i(S^n-f(S^{k-1})) \to H_{i-1}(S^n-f(S^k)) \to 0\oplus 0 \to \cdots$$

⟸ קבלנו $H_i(S^n-f(S^{k-1})) \xrightarrow{\cong} H_{i-1}(S^n-f(S^k))$

ולכן מהנחת האינדוקציה

$$H_i(S^n-f(S^k)) = H_{i+1}(S^n-f(S^{k-1})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i+1=n-(k-1)-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=n-k-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

—משל—

בפרט עבור $k=n-1$ $\quad S^{n-1} \hookrightarrow S^n$

במקרה זה $n-k-1=0$ כלומר $\tilde{H}_0(S^n-f(S^{n-1}))=\mathbb{Z}$

$H_0(S^n-f(S^{n-1}))=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

כלומר ל $S^n-f(S^{n-1})$ יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים

⟸ זה נקרא משפט ז'ורדן

דוגמה, הניסוח של ז'ורדן השני בד"כ $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n = S^n-\{*\}$

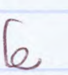
בתרגול תוכיחו את המקרה של: $S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

- שים לב שבניסוח הזה המשפט לא נכון עבור $n=1$

3 מרכיבי קשירות מסילתית

- ז'ורדן מתייחס לקשירות ולא לקשירות מסילתית, אבל בקב' פתוחות ב $\mathbb{R}^n$ זה אותו דבר

(יש קשירות מסילתית מקומית ולכן כל מרכיב קשירות מסילתית הוא פתוח
כיוון שכל מרכיב קשירות הוא איחוד זר של מרכיבי קשירות מסילתיים
אם אלו רכיבים פתוחים אז מרכיבי הקשירות המסילתית מתלכדים
עם מרכיבי הקשירות (אחרת מרכיב קשירות איחוד קב' פתוחות))

- נשים לב: המש' הסגורות של ,  לא זהה
(לא שקולים הומוטופית) ובכ"ז ההומולוגיה שלהם זהה.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & I \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & I_0 \arrow[dl] \arrow[d] & & & & I_1 \arrow[dl] \arrow[d] & \\
I_{00} \arrow[d] \arrow[d, shift left] & I_{01} \arrow[d] \arrow[d, shift left] & & & I_{10} & I_{11} &
\end{tikzcd}
$$

$$H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j})) \xrightarrow{\text{הכ'}} H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j \beta}))$$

$$z \neq 0 \longmapsto w \neq 0 \qquad \beta = \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

$$0 \longrightarrow H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j})) \xrightarrow{\cong} H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j 0})) \oplus$$

$$H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j 1})) \longrightarrow 0$$

הכ דין עובר ל $(\quad) \oplus (\quad)$

ונהו איזו' (לפי השבם סדרה) ולכן אורך

מהרכובה שם מדויק

מה"כ לפי המשנה (המקולה)

(שלם המסו)

$$H_i(S^n - f(D^k \times I_{\alpha_1 \dots \alpha_j 0})) \to (\quad {}_{\alpha_1 \dots \alpha_j 00}) \oplus (\quad {}_{\alpha_1 \dots \alpha_j 01})$$

ופרט!

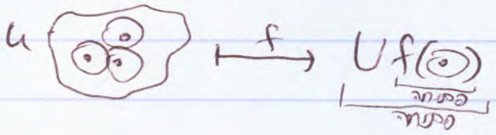
1/10

הרצאה 8 - 23/5/12

משפט שימור התחום (invariance of domain)
אם $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^n$ חח"ע אז $f(U)$ פתוחה.

מסקנה f העתקה פתוחה
כי נפעיל את המשפט הנ"ל על כל תת קב' פתוחה ב-U
(שהיא גם פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$)

הוכחת המשפט
מספיק שלכל $p\in U$ נמצא כדור פתוח $B(p,r)\subseteq U$ כך ש-
$f(B(p,r))$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$.
(למה? את U ניתן לכסות ע"י כדורים, ואם תמונת כל כדור
היא פתוחה, אז תמונת U היא איחוד קב' פתוחות
ולכן פתוחה.



)

בהינתן $p\in U$ נקח r כך שהכדור הסגור $\overline{B(p,r)}\subseteq U$
(למה יש כזה? U פתוחה ולכן יש בה כדור פתוח סביב p
בתוכו יש כדור סגור - פשוט נקח רדיוס קטן יותר)
ונראה שהטענה נכונה עבור הכדור הפתוח $B(p,r)$

הכדור הסגור הכללי ב-$\mathbb{R}^n$: D^n. ולכן מספיק להוכיח
את הטענה הבאה:
טענה אם $f:D^n\to\mathbb{R}^n$ חח"ע אז $f(\mathring{D}^n)$ פתוחה
כאשר: $\mathring{D}^n=D^n-\partial D^n$

הוכחת הטענה
(*) נשתמש במשפט ז'ורדן עבור $\mathbb{R}^n$ ולכן נניח $n>1$
(עבור $n=1$: תרגיל באינפי 1
פונק' ב-$\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע אזי היא מונוטונית)
$X=\mathbb{R}^n-f(\partial D^n)$ קבוצה פתוחה עם 2 מרכיבי קשירות מסלולית
U ו-V שהם פתוחים. (מרכיבי קשירות מסלולית של
קב' פתוחה הם פתוחים)

23/5/12

2/1ד

⊗⊗ מצב שני:

$$X = \mathbb{R}^n - f(\partial D^n) = \underbrace{f(\mathring{D}^n)}_{A} \cup \underbrace{(\mathbb{R}^n - f(D^n))}_{B}$$

גם זו חלוקה ל 2 קב' זרות קשירות מסילתית

$f(\mathring{D}^n)=A$ - תמונה רציפה של מרחב קשיר מסילתית

$\mathbb{R}^n-f(D^n)=B$ - קשיר מסילתית לפי התרגיל ($\tilde{H}_{n-1}(B)=\mathbb{Z}$ ועל השאר 0, לכן אם $n>1$ $\tilde{H}_0(B)=0$)

(B קב' פתוחה, A אנחנו רוצים להראות שפתוחה)

נשים ש2 החלוקות שתארנו מתלכדות זו עם זו:

A,B קשירות מסילתית ולכן כל קב' מוכלת באחד ממרכיבי הקשירות המסילתיים U או V.

אם $A,B\subseteq U$ (או $A,B\subseteq V$) אזי $A\cup B\subseteq U\neq X$

ולכן אחד מהם ב U והשני ב V. בה"כ $A\subseteq U$, $B\subseteq V$

אבל אזי $A=U$, $B=V$ כי אחרת $A\cup B\neq X$ (כי אלו קבוצות זרות).

בפרט $A=f(\mathring{D}^n)$ קבוצה פתוחה ■

— מש"ל —

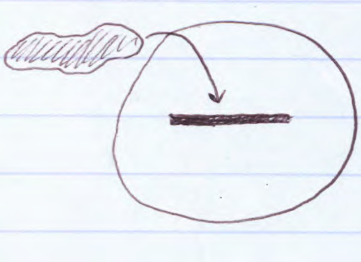
<u>מסקנה</u> אם חנא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי לא קיימת העתקה $f:U\to\mathbb{R}^n$ חח"ע

הוכחה

נביט בשיכון הטבעי (הלינארי) $i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k$

$(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$

אזי $i\circ f: U\to\mathbb{R}^k$ רציפה וחח"ע, ותמונתה מוכלת בתת מרחב לינארי ממימד n של $\mathbb{R}^k$ ולכן לא יכולה להיות פתוחה (כי הפנים שלו ריק) סתירה!



בפרט אין שיכון $S^n\hookrightarrow S^k$ כש-$n<k$.

(נסתכל על סביבה של נק' שנה $\cong\mathbb{R}^n$. ראה מסקנות בהמשך)

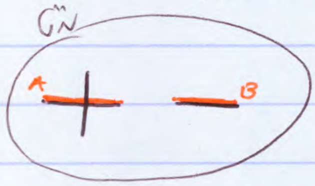
23/5/12

3/10

עוד מסקנה: אם $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה
$A\subseteq\mathbb{R}^n$ לא פתוחה אז: $U\not\cong A$

כי אם יש הומאו' $h: U\to A$
נרכיב אותו עם i ההכלה ל-$\mathbb{R}^n$: $U\xrightarrow{h}A\xrightarrow{i}\mathbb{R}^n$
ואז תמונת U ב-$\mathbb{R}^n$, שזה בדיוק A, פתוחה.

- יכול להיות סגורה $\cong$ לא סגורה: למשל $\mathbb{R}\cong(a,b)$ קטע פתוח
- זה לא חייב להתקיים במרחבים טופו' שונים
למשל



$A\cong B$ אבל B פתוח ו-A לא.

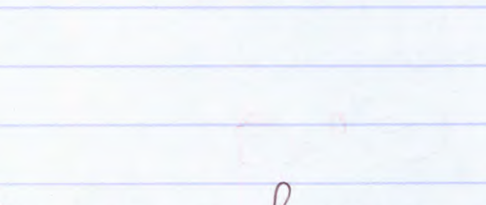
- בפרט, אין העתקה חח"ע $S^k\hookrightarrow S^n$ כש $n<k$

הגדרות

(א) יריעה n מימדית היא מ"ט M האוסדורף עם בסיס בן מניה כך שלכל $p\in M$ יש סביבה $p\in U\subseteq M$ שהומאו' לכדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$
(לחלופין: שהומאו' ל-$\mathbb{R}^n$).

⊛ משטח = יריעה ממימד 2.

⊛ האם יכול להיות יריעה n מימדית שהיא גם m מימדית?
לא! נקח נק' p יש לה סביבה $U_1\cong\mathbb{R}^m$
וסביבה $U_2\cong\mathbb{R}^n$



אז החיתוך קב' פתוחה
גם ב-$\mathbb{R}^n$ וגם ב-$\mathbb{R}^m$
שהומאו' פתוחה!

$\Leftarrow$ אם כן המושג מימד של יריעה מוגדר היטב!

(ב) יריעה סגורה פירושו יריעה קומפקטית
(במקרה זה לא צריך להניח שיש בסיס בן מניה
כי קומפקטיות+האוסדורף גורר את זה)

23/5/12

4/10

ג) יריעה עם שפה היא מ"ט האוסדורף עם בסיס בן מנייה
כך שלכל נק' יש סביבה שהומאו' או ל $\mathbb{R}^n$ או ל H^n

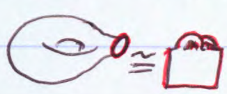
$$H^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \quad halfspace$$

(אולחלופין הומאו' או לכדור פתוח או לחצי כדור פתוח

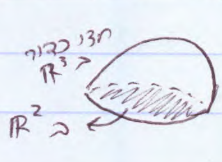
 $= \{(x_1,\dots,x_n) : \sum x_i^2 < 1 ,\ x_n \geq 0\}$)

- יריעה סגורה היא בלי שפה. אם יש, אומרים היריעה קומפקטית עם שפה.

דוגמאות

- S^n סגורה (= קומפקטית בלי שפה)
- $\mathbb{R}^n$ יריעה (לא קומפקטית, בלי שפה)
- D^n יריעה קומפקטית עם שפה
- חצי כדור פתוח יריעה עם שפה (לא קומפקטית)
-  טורוס בלי דיסק יריעה עם שפה (השפה באדום)

- למעשה ניתן לדעת איזה נק' הינן שפה ואיזו לא לפי סוג הסביבה שלה. (לנק' יש רק סוג אחד של סביבה. Xor)
השפה הינה אוסף הנק' שלהם סביבה H^n
- השפה עצמה היא יריעה ממימד n-1 ללא שפה
(זה קשור בדרך ש $\partial^2 = 0$)



אם היריעה קומפקטית - השפה קומפקטית
(כי הינה סגורה $\partial X = X - int(X)$)
אם לא - השפה יכולה להיות קומפקטית
ויכולה לא להיות קומפקטית

23/5/12

5/10

הומולוגיה יחסית

יהי $A\subseteq X$ תת מרחב

נגדיר הומולוגיה של X ביחס ל A: $H_n(X,A)$ -- הומולוגיה של זוגות

זהו פנקטור מקטגוריה של זוגות לחבורות (אבליות).

> **קטגוריה של זוגות** — אובייקטים הם (X,A) כך ש $A\subseteq X$
>
> מורפיזמים הם $f:(X,A)\to(Y,B)$ הם $f:X\to Y$ כך ש $f(A)\subseteq f(B)$

$C_n(A)\subseteq C_n(X)$ (מושרה מההכלה $A\subseteq X$)

(ברור כי כל סימפלקס סינגולרי ל A ניתן לחשוב עליו כסימפלקס סינגולרי לX)

מגדירים: $C_n(X,A)=\dfrac{C_n(X)}{C_n(A)}$ ← סימפלקסים שתמונתם כולה בA נחשבים לאפס

זו עדיין חב' אבלית חופשית (פשוט "הרגנו" חלק מהיוצרים)

מתקיים $\partial(C_n(A))\subseteq C_{n-1}(A)$ ולכן מושרה הומומו' $\dfrac{C_n(X)}{C_n(A)}\xrightarrow{\partial}\dfrac{C_{n-1}(X)}{C_{n-1}(A)}$

> באופן כללי: אם $\psi:A\to B$, $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$, $\psi(A')\subseteq B'$
>
> אז ψ משרה $\psi': A/A'\to B/B'$

כך מוגדר לנו קומפלקס שרשראות

וכן מתקיים $\partial^2=0$

$$\vdots\to C_n(X,A)\xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X,A)\xrightarrow{\partial} C_{n-2}(X,A)\to\vdots$$

← להומולוגיה של הקומפלקס הנ"ל קוראים: **ההומולוגיה היחסית** $H_n(X,A)$

(זה לא ההומולוגיה של המשלים של A ב X, אבל במובן מסוים זה כן "הורג" את A.)

← בהינתן העתקה $f:(X,A)\to(Y,B)$

ההומומו' המושרה מקיים $f_\#(C_n(A))\subseteq C_n(B)$

ולכן משרה $f_\#:\dfrac{C_n(X)}{C_n(A)}\longrightarrow\dfrac{C_n(Y)}{C_n(B)}$

23/5/12

6/10

← ההומומו' המושרה $f_\#: C_n(X,A)\to C_n(Y,B)$ מתחלף עם ∂

(שכן מתחלפים על הנציגים)

כלומר $f_\#$ העתקת שרשראות

ולכן משרה $f_*: H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$

כל המשפטים והטענות שלמדנו על הומולוגיה נכונים גם עבור הומולוגיה יחסית!

<u>הגדרה</u> $f,g:(X,A)\to(Y,B)$

$H: X\times I\to Y$ נקראת הומוטופיה של זוגות מ f ל g

אם • H הומוטופיה מ f ל g

• $H(A\times I)\subseteq B$

← בעזרת אותה הוכחה בדיוק (שיטת הפריזמה) כמו להומולוגיה רגילה

מראים שאם f הומוטופי ל g אז $f_*=g_*$.

<u>הגדרה</u> $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ כיסוי של X

$$C_n^{\mathcal{B}}(X,A)=\frac{C_n^{\mathcal{B}}(X)}{C_n^{\{B_\alpha\cap A\}}(A)}=\frac{C_n^{\mathcal{B}}(X)}{C_n(A)\cap C_n^{\mathcal{B}}(X)}$$

← יש הומומו' טבעי $H_n^{\mathcal{B}}(X,A)\to H_n(X,A)$

ושוב, כמו בהומולוגיה הרגילה, הוא יהיה איזומורפיזם!

מעצם הגדרת $C_n(X,A)$, יש לנו סדרה קצרה מדויקת:

$$0\to C_n(A)\to C_n(X)\to C_n(X,A)\to 0$$

(מדויק מהגדרת $C_n(X,A)$ כמנה $\frac{C_n(X)}{C_n(A)}$)

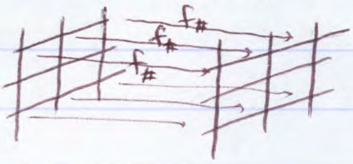
ולכן משרה סדרה ארוכה מדויקת:

$$\cdots\to H_n(A)\to H_n(X)\to H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)\to\cdots$$

23/5/12

7/10

וזה טבעי כי כשנתון העתקה $(X,A)\xrightarrow{f}(Y,B)$



היא משרה הומומ'

שמתחלף עם העתקות

של הסדרה

ולכן משרה

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
 & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

כך שכל ריבוע מתחלף.

את אותו דבר ניתן לעשות עם הומולוגיה מצומצמת:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_1(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & C_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & C_0(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

הערה אין הומולוגיה יחסית מצומצמת

- ישנה העתקה $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$

אבל בשביל שזה יגדר העתקה של המנה $\frac{C_0(X)}{C_0(A)} \to \mathbb{Z}$

צריך ש $\varepsilon(C_0(A)) = 0$ וזה לא כך

- בנוסף, אם נשתמש בהעתקה $C_0(X,A) \to \mathbb{Z}$

אז לא תהיה התחלפות בריבוע האחרון (*)

אבל עם כל השאר $(C_0(A), C_0(X))$ אפשר לעשות מצומצם

ועדיין השורה האחרונה מדויקת.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{Id} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$$

23/5/12

8/10

משפט הקידוח (excision)

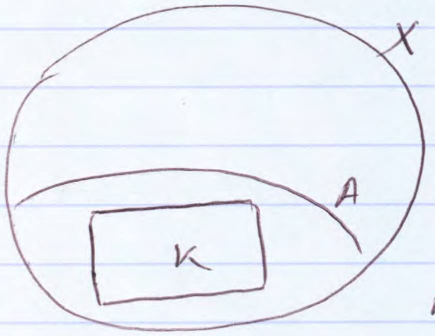
נניח $K \subseteq A \subseteq X$ ויותר מזה: $\bar{K} \subseteq \mathring{A}$

אזי ההכלה

$$i : (X-K, A-K) \longrightarrow (X,A)$$

משרה איזומורפיזם

$$i_* : H_i(X-K, A-K) \longrightarrow H_i(X,A)$$



אינטואיטיבית: כל מה שקורה עמוק בתוך A לא משנה: ניתן לזרוק אותו וזה לא ישנה את ההומולוגיה היחסית. פעולה כזו של לזרוק את K נקראת קידוח (excision).

שים לב: אין פה שום הנחה על A, רק על K עצמו.

הוכחה

$\{A, K^c\}$ הוא כיסוי טוב של X (כי $\mathring{A}, \bar{K}^c$ כיסוי פתוח)
(ולמעשה זה שבגללו דרשנו ש $\bar{K} \subseteq \mathring{A}$).

ולכן ההכלה $H_i^{\{A,K^c\}}(X,A) \hookrightarrow H_i(X,A)$ היא איזו'.

וכן ההעתקה הטבעית

$C_i(X-K, A-K) \hookrightarrow C_i^{\{A,K^c\}}(X,A)$ הוא איזו'

הסבר

כל סימפלקס סינגולרי ב- $C_i^{\{A,K^c\}}(X,A)$ או שהתמונה שלו ב A ואז הוא נחשב אפס או שהתמונה שלו ב $X-K = K^c$

וזה בדיוק הסימפלקסים הסינגולריים ב $C_i(X-K,A-K)$. וכן להפך.

$$\Leftarrow \quad H_i^{\{A,K^c\}}(X,A) \cong H_i(X-K, A-K)$$

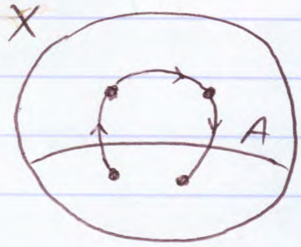
וסה"כ

$$H_i(X-K,A-K) \xrightarrow{\cong} H_i^{\{A,K^c\}}(X,A) \xrightarrow{\cong} H_i(X,A)$$

= מש"ל =

23/5/12

9/10



← איך נראה מחזור יחסי?

מחזור יחסי אם השפה שלו ב A

(כלומר השפה שלו אפס ב $C_{n-1}(X,A)$)

באופן פורמלי: z מחזור יחסי פורמלית:

(א) z שרשרת ב $C_n(X)$

(ב) $\partial z \in C_{n-1}(A)$ ⟸ $0=\partial z \in C_{n-1}(X,A)$

(כי שייך לגרעין)

← נרצה להבין את ההעתקות בסדרה:

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to \cdots$$

מושרה ע"י ההכלה

מושרה ע"י ההטלה

$$C_n(X) \to \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

חושבים על ה ביחס ל A

(שום השפה ב A אינה מחזור)

מושרה Δ ?

יש להבין את: $H_n(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(X,A) \\
 & & z & \longmapsto & z \\
 & & \downarrow & & \text{מחזור יחסי} \\
C_{n-1}(A) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) & & \\
a & \longmapsto & \partial z & &
\end{array}$$

A ניקח מחזור יחסי ב $z \in C_n(X,A)$

(ניתן לחשוב על זה כסתם שרשרת $z \in C_n(X)$

z מחזור יחסי: כלומר שפתו מוכלת ב A

ולכן ניתן לחשוב על ∂z כאיבר ב $\partial z \approx a \in C_{n-1}(A)$

אם כן
$$H_n(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A)$$
$$z \longmapsto \partial z$$

נחשב הומולוגיה מסוימת...

משפט

$$H_i(D^n,\partial D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכחה נביט בסדרה הארוכה המדויקת של הזוג $(D^n,\partial D^n)$ עם הומולוגיות מצומצמות

23/5/12

10/10

$$\tilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{i-1}(\partial D^n) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(D^n)$$

$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$

פה לא כותבים מצומצם!

$$\Rightarrow H_i(D^n, \partial D^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\underbrace{\partial D^n}_{\cong S^{n-1}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i-1=n-1 \Downarrow i=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

■

מכאן ש-

$$H_i(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כזכור יש לנו איבר $I_n \in C_n(\Delta^n)$ (העתקת הזהות)

זהו מחזור יחסי $I_n \in C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ כי $\partial I_n \subseteq \partial\Delta^n$

[∂ בתפקיד כפול:
– העתקת שפה
– סימון שפה של יריעה]

בפעם הבאה נוכיח שהמחזור היחסי הזה
מייצג את היוצר של $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

הרצאה 9 - 30/5/12

קבלנו מסקנה מהסדרה הארוכה המדויקת
$$H_i(D^n,\partial D^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & i=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

לא בכל הומולוגיה אנחנו יודעים לרשום במפורש את היוצרים.
למשל בהומולוגיה השניה של טורוס יש לנו יוצר, אבל לא לגמרי ברור איך הוא נראה (מה הסימנים שלו).
אבל במקרה שלנו ניתן להצביע במפורש על יוצר
יותר נוח לעשות זאת עבור $(\Delta^n,\partial\Delta^n)\cong(D^n,\partial D^n)$

טענה $[I_n]\in H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)$ הוא יוצר של חבורה זו

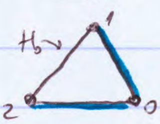
(לא היוצר כי ב $\mathbb{Z}$ יש 2 יוצרים: ± 1)

הוכחה באינדוקציה על המימד n
בסיס תרגיל לבית!
(מומלץ: יש איזו' $H_1(\Delta^1,\partial\Delta^1)\to H_0(\overset{S^0}{\partial\Delta^1})$
ב $H_0(S^0)$ היוצר הוא p-q שזה בדיוק ∂I_1 $\quad p\xrightarrow{I_1}q$)

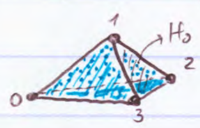
נניח עבור n-1
נוכיח עבור n:
לפי הסדרה $H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ הוא איזו'
(כי Δ^n כויץ ולכן $H_i(\Delta^n)=0$, ובסדרה יש $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{H_n(\Delta^n)}}\to H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)\xrightarrow{\cong}H_{n-1}(\partial\Delta^n)\to\underset{0}{\underset{\shortparallel}{H_{n-1}(\Delta^n)}}$)

נסמן $H\subseteq\partial\Delta^n$ = {איחוד כל הדפנות ב $\partial\Delta^n$ מלבד הראשונה (דופן האפס)} ו H_0 את דופן האפס

ב Δ^n יש n+1 קודקודים ולכן n+1 דפנות (דופן מול כל קודקוד)
ב H יש n דפנות (כולן פרט לדופן שמול קודקוד ה 0)
למשל ב Δ^2:



ב Δ^3:



ב $\partial\Delta^n$ זה שקול להוצאת דיסק מספירה ($\partial\Delta^n\cong S^{n-1}$) שזה שקול לחצי ספירה.
(כאשר חושבים על שפת הדופן הנזרקת כקו המשווה)

נבנה סדרה מדויקת של $(\partial\Delta^n,H)$: נקבל שיש איזו'

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{H_{n-1}(H)}}\to H_{n-1}(\partial\Delta^n)\xrightarrow[\text{הטלה}]{\cong}H_{n-1}(\partial\Delta^n,H)\to\underset{0}{\underset{\shortparallel}{H_{n-2}(H)}}$$

(H הוא דיסק ולכן כויץ)

30/5/12

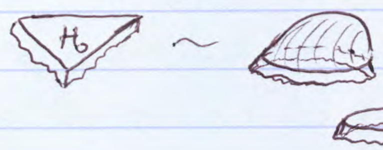
2/6

נשתמש במשפט הקיטוע ונקח $K=H-(\varepsilon)$

כלומר K הוא כמעט כל H רק פחות שוליים (וסביבת ε)

אזי לפי המשפט יש איזו׳

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n,H)\xrightarrow[\text{הכלה}]{\cong}H_{n-1}(\partial\Delta^n-K,H-K)$$



$\partial\Delta^n-K$ – דיסק עם שוליים

$H-K$ – קצת שוליים

יש הכלה $\qquad H_{n-1}(\partial\Delta^n-K,H-K)\longleftarrow H_n(H_0,\partial H_0)$

והיא איזו׳ <u>כי:</u> יש $\underset{[\text{בלי שוליים}]}{(H_0,\partial H_0)}\xhookrightarrow{\text{הכלה}}\underset{[\text{עם שוליים}]}{(\partial\Delta^n-K,H-K)}$

אך ההכלות $\begin{cases}\partial H_0\hookrightarrow H-K\\ H_0\hookrightarrow\partial\Delta^n-K\end{cases}$ הן נסג עיוותי

ולכן משרות <u>איזו׳</u> על ההומולוגיות:

$$\begin{tikzcd}
\tilde H_i(\partial H_0) \arrow[r] \arrow[d, "\text{הכלה}", "\cong"'] & \tilde H_i(H_0) \arrow[r] \arrow[d, "\text{הכלה}", "\cong"'] & H_i(H_0,\partial H_0) \arrow[r] \arrow[d, "\text{הכלה}"] & \tilde H_{i-1}(\partial H_0) \arrow[r] \arrow[d, "\text{הכלה}", "\cong"'] & \tilde H_{i-1}(H_0) \arrow[d, "\text{הכלה}", "\cong"'] \\
\tilde H_i(H-K) \arrow[r] & \tilde H_i(\partial\Delta^n-K) \arrow[r] & H_i(\partial\Delta^n-K,H-K) \arrow[r] & \tilde H_{i-1}(H-K) \arrow[r] & \tilde H_{i-1}(\partial\Delta^n-K)
\end{tikzcd}$$

בלי שוליים

עם שוליים

(בגלל הנסג העיוותי 2 העמודות הימניות ו2 השמאליות הן איזו׳)

בגלל הטבעיות של הסדרה הארוכה הדיאגרמה מתחלפת

ולכן ניתן להשתמש בלמת ה5 לפיה גם העמודה האמצעית

היא איזו׳ כלומר $H_i(H_0,\partial H_0)\xrightarrow[\text{הכלה}]{\cong}H_i(\partial\Delta^n-K,H-K)$

סה״כ קבלנו שרשרת איזו׳:

$$H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)\xrightarrow{\Delta}\tilde H_{n-1}(\partial\Delta^n)\xrightarrow{\text{הכלה}}H_{n-1}(\partial\Delta^n,H)\xleftarrow{\text{הכלה}}H_{n-1}(\partial\Delta^n-K,H-K)\xleftarrow{\text{נסג עיוותי}}H_{n-1}(H_0,\partial H_0)$$

• שים לב שH_0 זה למעשה Δ^{n-1}!

כדי להשתמש בהנחת האינדוקציה יש לבדוק שהאיזו׳ שלח את I_n לI_{n-1}. (ראה זאת ע״י כך שנבדוק שהתמונות של I_n ושל I_{n-1} זהות ב $H_{n-1}(\partial\Delta^n,H)$:

$H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)\xrightarrow{\Delta}\tilde H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ ראינו שבסדרה הארוכה ההומו׳ המקשר

פועל כהעתקת שפה (∂) ולכן $I_n \xrightarrow{\Delta} \partial I_n$

נרשום במפורש: $\partial I_n = I_n\circ\tau_0 - I_n\tau_1 + \dots$ (סכום של צמצומים לשפה)

לאחר מכן יש $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \xrightarrow{\text{הטלה}} H_{n-1}(\partial\Delta^n, H)$ הטלה ולכן $\partial I_n \longmapsto \partial I_n$ (אותו הביטוי)

מכיוון שנ $H_{n-1}(\partial\Delta^n - K, H-K) \xleftarrow[\text{עיוותי}]{\text{נסוג}} H_{n-1}(H_0, \partial H_0)$

I_{n-1} יהיה של H_0 ב-Δ^n אפשר לחשוב עליו כצמצום

על דופן השפה שהיא $I_n\circ\tau_0$ ולכן $I_{n-1} \longmapsto I_n\circ\tau_0 \underset{I_n \text{ זהות}}{=} \tau_0$

$H_{n-1}(\partial\Delta^n - K, H-K) \xrightarrow{\text{הטלה}} H_{n-1}(\partial\Delta^n, H)$ שבו הטלה ולכן $\tau_0 \longmapsto \tau_0$

$\Leftarrow$ סכום:

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, H) \longleftarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n - K, H-K) \leftarrow H_{n-1}(H_0, \partial H_0)$$

$$I_n \longmapsto \partial I_n \longmapsto \partial I_n = \tau_0 \longleftarrow\!\shortmid\ \tau_0 = I_n\circ\tau_0 \longleftarrow\!\shortmid\ I_{n-1}$$

אבל ב $H_{n-1}(\partial\Delta^n, H)$: $\partial I_n = \tau_0$ כי $\partial I_n = \tau_0 \underbrace{- \tau_1 + \tau_2 - \dots}_{\text{מוכלים ב H ולכן הם 0 בהומולוגיה היחסית}}$

עכשיו משתמשים בהנחת האינדוקציה לפיה I_{n-1} יוצר של $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$
ובגלל השיכון יש $I_{n-1} \leftrightarrow I_n$ (לפי אותו איזו׳) אז I_n יוצר של $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

= מש״ל =

$\leftarrow$ מהו בדיוק יוצר של $H_n(D^n, \partial D^n)$?

יש הומיאו׳ h $\quad (\Delta^n, \partial\Delta^n) \overset{h}{\cong} (D^n, \partial D^n)$

והוא משרה איזו׳ $\quad H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \overset{h_*}{\cong} H_n(D^n, \partial D^n)$

$$\underset{\uplus}{I_n} \longmapsto h_*(I_n) = h\circ \underset{I_n \text{ זהות}}{I_n} = h$$

ולכן h הוא היוצר בעצמו.

30/5/12

4/6

$\Leftarrow$ $(D^n, \partial D^n) \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ כאשר ט הכלה $\left\{ \begin{array}{l} D^n \to \mathbb{R}^n \\ \partial D^n \to \mathbb{R}^n - \{0\} \end{array} \right.$ הוו שקולות הומוטופיות

ולכן באותו אופן כמו בהוכחת הטענה (בעזרת טבעיות הסדרה והלמה 5)

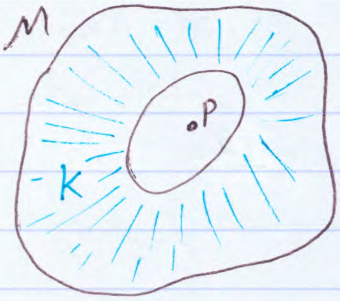
ההכלה משרה איזו' על ההומולוגיה. (וכן עם $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$)

מכאן אנו יודעים מי יוצר של $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$!

כל שיכון סביר של Δ^n סביב 0

והבנה זו חשובה להבנת מושג האוריינטציה של יריעה..

תהי M יריעה n ממדית, $p \in M$ מהו $H_n(M, M-\{p\})$?



נשתמש בקיזוז: נקח סביבה ~~מספיק קטנה~~ הומאו' ל $\mathbb{R}^n$ של p - זאת המשלימה ב M נסמן ב K

$K \subseteq M - \{p\}$

נקבל $H_n(M, M-\{p\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$

$M-K$ הוא סביבה של p שהומאו' ל $\mathbb{R}^n$ (מהגדרת יריעה)

סביבה שהומאו' ל $\mathbb{R}^n$ פחות נקודה

ב $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ אנחנו מכירים יוצר: ט שיכון סביר של Δ^n

דרך ההכלה נקבל יוצר של $H_n(M, M-\{p\})$:

$(I_n \to \mathbb{R}^n \cong M-K)$

קבלנו שלכל $p \in M$ $H_n(M, M-\{p\}) \cong \mathbb{Z}$ ולכן יש 2 יוצרים.

$\leftarrow$ בחירה של אחד משני היוצרים של $H_n(M, M-\{p\})$ נקראת <u>אוריינטציה ב p</u> (או: בסביבה של p).

⊛ <u>מיהו היוצר השני?</u> ניקח את השיקוף $R: S^n \to S^n$ וראינו שעל הספירה מתקיים $R_* = -Id$ ומטבעיות הסדרה נקבל שאותו דבר קורה גם בהומולוגיה היחסית

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H_n(D^n, D^n - \{p\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(D^n - \{p\}) & \to 0 \\ & \downarrow R_* & & \downarrow R_* = -Id & \\ 0 \to & H_n(D^n, D^n - \{p\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(D^n - \{p\}) & \to 0 \end{array}$$

ולכן המחוללים הם $I_n, R_*(I_n)$

(כאשר $R_*(I_n)$ האוריינטציה ההפוכה ל I_n)

$\leftarrow$ איך המושג הזה מתקשר למה שאנו מכירים אוריינטציה?

30/5/12

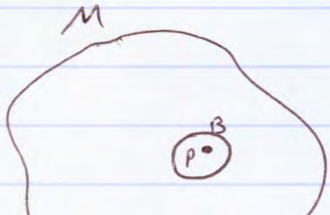
$\frac{5}{6}$

<u>הגדרה</u> יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$. שני בסיסים סדורים של V
$u_1,u_2,\dots$ יקראו שקולים אם ההעתקה הלינארית
$v_1,v_2,\dots$ $v_i \longmapsto u_i$ היא בעלת דטרמיננטה חיובית.

← יחס זה מחלק את אוסף הבסיסים ל 2 מחלקות שקילות.
כל מחלקה היא <u>אוריינטציה</u> של V

ביריעות: שיכון של סימפלקס ב $\mathbb{R}^n$ (סביבה של נק' ביריעה) זה כמו
בחירת בסיס (למשל לפי ה span של הצלעות היוצאות מקודקוד ה0)
ואם מחליפים קודקודים (עושים שיכון שונה: R_*) אז זהו מעבר בסיס
עם דטרמיננטה <u>שלילית</u> (כי חלוף הוא עם דטרמיננטה שלילית).

← כל זה היה אוריינטציה בנק'. נרצה להגדיר אוריינטציה של יריעה:



תהי M יריעה n ממדית $p\in M$
ניקח B כדור קטן $p\in B\subseteq M$
כדור בסביבה של p שהומאו' ל $\mathbb{R}^n$.

שבע"פ הקודם ניתן לראות שגם $\mathbb{Z}\cong H_n(M,M-B)$
ניקח את הסביבה יותר גדולה (הומאו' ל $\mathbb{R}^n$) ונעשה קיצוץ

$H_n(M,M-B)\cong H_n(M-N,M-B-N)\cong H_n(D^n,\partial D^n)$
D^n (או $\mathbb{R}^n$) $\quad \partial D^n$

לכל נק' $a\in\mathring{B}$ ההכלה $i: H_n(M,M-B)\hookrightarrow H_n(M,M-a)$ היא איזו'.
(לפי נסג עיוותי $M-B\to M-a$).

ולכן בלשון סימפלקסים: אם בוחרים סימפלקס יוצר ב p אפשר
להשתמש באותו סימפלקס לכל הנק' ב B. (זה בעצם לומר שבסביבה של כדור
תמיד יש אוריינטציה)

לכל $q\in M$ נבחר אוריינטציה ב q כלומר נבחר יוצר ($a_q\in H_n(M,M-q)$)
נאמר שהבחירה היא <u>עקבית</u> / <u>רציפה בסביבת p</u> אם
קיים יוצר $a_B\in H_n(M,M-B)$ כך שלכל $b\in\mathring{B}$ $i_*(a_B)=a_b$

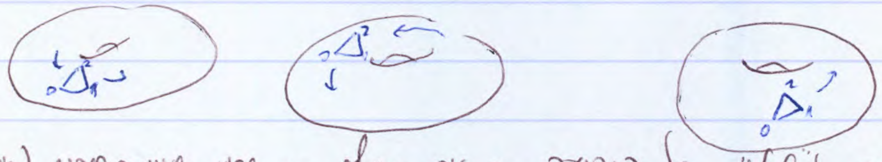
← אם לכל נק' ב M יש סביבה B כזו כך שהבחירה היא עקבית
שם אז בחירה כזו היא <u>אוריינטציה של היריעה</u>.

30/5/12

6/6

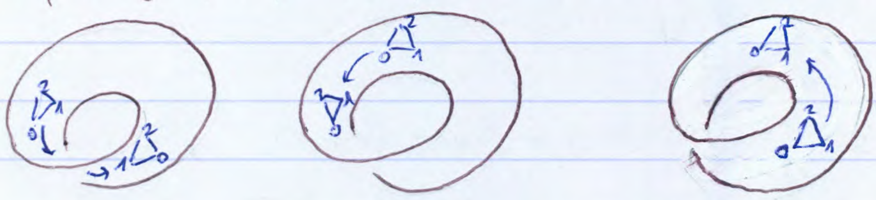
כלומר אם אפשר לעשות בחירה רציפה בכל הנק' אז ליריעה יש אוריינטציה

למשל:



אם אפשר "לטייל" על היריעה באופן רציף כך שאין שינוי בסימון. (אין חילוף)

לעומת זאת:

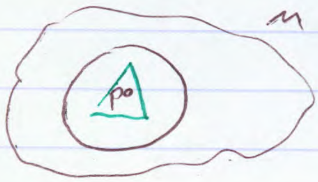


כשנחזור אחרי הסיבוב הראשון הכיוונים יתהפכו
ולכן אין אוריינטציה רציפה (בחירה עקבית)

הערה אם יש אוריינטציה אז תמיד יש 2 אפשרויות לבחור.

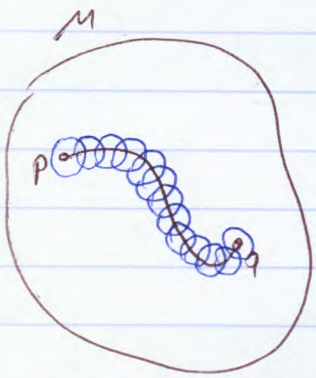
הרצאה 10 - 6/6/12

נחזור לדבר על אוריינטציה של יריעות $H_n(M, M-\{p\}) = \mathbb{Z}$



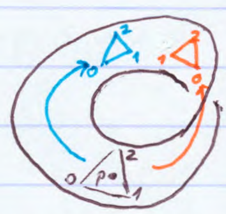
בסביבה של נק' תמיד ניתן לקבוע אוריינטציה עקבית
בכל נק' יש 2 אוריינטציות אפשריות.

נניח בחרנו אוריינטציה בנק' p ותהי נק' אחרת $q \in M$ $(\neq p)$
נקח מסילה מ p ל q — אפשר להמשיך את האוריינטציה
באופן רציף לאורך המסילה ולקבוע אוריינטציה על q.
איך? במסילה יש כיסוי ע"י עיגולים: קביעה של
אוריינטציה ב p מכריחה את בחירת האוריינטציה
של נק' בסביבה שלו, וכך בגלל החפיפות בין
הכדורים, קביעת אוריינטציה בנק' מכריחה בחירה
מסוימת של אוריינטציה בנק' אחרות בהמשך המסילה
כדי שהמעבר יהיה רציף.



אם היריעה אוריינטבילית אז האוריינטציה שקושרה על q לא
תלוי במסילה, אחרת זה כן תלוי במסילה.

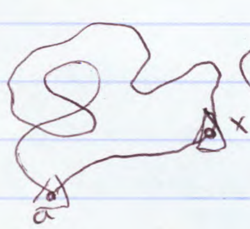
למשל במביוס:



באופן שקול: לכל נק' $a \in M$ אם לכל לולאה סגורה ב a
כאשר גוררים את האוריינטציה לאורך הלולאה חוזרים לאותה
אוריינטציה על a שהתחלנו אז היריעה אוריינטבילית.

* נימוק מספיק הכרחיות

למה זה תנאי מספיק? אם היו 2 מסילות שונות מ a ל x
שמביאות לאוריינטציה שונה על x ניתן לשרשר אותן
ללולאה לא תקינה
(כלומר שמשרה על a אוריינטציה שונה ממה שהגדרנו בהתחלה)



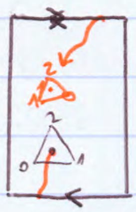
6/6/12

נשים לב שאם אנחנו משנים את המסלה שינויים קטנים כלומר בתוך סביבה קטנה (כדור) זה לא משנה את האוריינטציות שהן מושרות (שכן בסביבה תמיד יש אוריינטציה עקבית)

<u>מסקנה</u> אם יש 2 מסלולים הומוטופיים אז האוריינטציות דרך 2 המסלולים זהות.

<u>כי</u> ניתן לשבור את ההומוטופיה להומוטופיות קטנות שנכנסות בכדורים פתוחים.

<u>דוג'</u> מסלולים שומרים אוריינטציה במביוס



מסלולים שחוצים את קו ההדבקה לא שומרים אוריינטציה.

← שרשור מסלולים הופכי אוריינטציה יוצר מסלול שומר אוריינטציה.

ולכן סה"כ:

⇐ קבלנו הומומ' $\pi_1(M,a) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2,\cdot)$

כאשר מסלול שומר אוריינטציה $\longleftrightarrow 1$

מסלול הופך אוריינטציה $\longleftrightarrow -1$

<u>טענה</u> M אוריינטבילית אמ"מ ההומומ' הנ"ל הוא ההומומ' הטריוויאלי

אך נשים לב שזה הומומ' לחבורה <u>אבלית</u> ולכן יש הומומ' מושרה על $H_1 = Ab\pi_1$

כלומר יש הומומ' $H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$

ו M אוריינטבילי אמ"מ ההומומ' הזה טריוויאלי.

כדי לבדוק אם הומומ' כזה הוא טריוויאלי מספיק לבדוק על היוצרים של $H_1(M)$

- להראות ש M לא אוריינטבילית: יש למצוא לולאה הופכת אוריינטציה
- להראות ש M אוריינטבילית: לבדוק על היוצרים של M שהם אוריינטבילים.

6/6/12

3/12

<u>דוגמא</u> נבדוק ש T_n אוריינטבילי
T_1 יודע זה טבעת
לטבעת יש שיכון ב $\mathbb{R}^2$

(באופן כללי: $\mathbb{R}^n$ אוריינטבילית כי $H_1(\mathbb{R}^n)=0$
וכל הומומ' ממנו טריוויאלי)

הטבעת היא קב' <u>פתוחה</u> ו<u>מאותו ממד</u> (2) ולכן הטבעת אוריינטבילית.
(שכן יש נתון אוריינטציה: אם היתה מסלול לא שומרת אוריינטציה בטבעת היא הייתה נראית גם ב$\mathbb{R}^2$).

<u>הגדרה</u> יריעה עם שפה היא אוריינטבילית אם הפנים ($\text{int}M = M-\partial M$) שלה היא אוריינטבילי

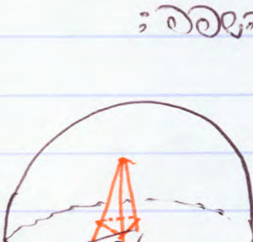
← אם יריעה היא אוריינטבילית אז השפה (שהיא יריעה ממימד נמוך יותר) גם אוריינטבילית.

הערה באופן שניתן להבדיל בין הנק' בפנים ובשפה של יריעה לפי טיב הסביבה שלהם.

אם $a\in \text{int}M$ אז ל a יש סביבה הומאו' ל $\mathbb{R}^n$
ולכן לפי הקודם $H_n(M,M-\{a\}) = \mathbb{Z}$

אם $a\in \partial M$ אז ל a יש סביבה הומאו' לחצי כדור
כאשר תמונת a (תחת ההומאו' הזה) היא בבסיס הכדור
חצי כדור הוא כווץ וכך גם חצי כדור פחות
נק' בבסיס ולכן $H_n(M,M-\{a\})=0$

← אוריינטציה בפנים של M משרה אוריינטציה על השפה:
נסתכל על שיכון של סימפלקס: רוצים לקבוע סדר קודקודים
כדי לקבוע אוריינטציה שמתאימה עם האוריינטציה הפנימית.
מוסיפים קודקוד פנימי ומגדילים את ממד הסימפלקס
דוחפים אותו קדימה לתוך הפנים ואז האוריינטציה
הפנימית קובעת סדר.



6/6/12

4/12

• שים לב שזה דורש הגדרה של "צד" (צד פנימי לעומת היריעה וחיצוני)
בשיכון של מביוס ב-$\mathbb{R}^3$ זה לא תקף כי אין צדדים מוגדרים

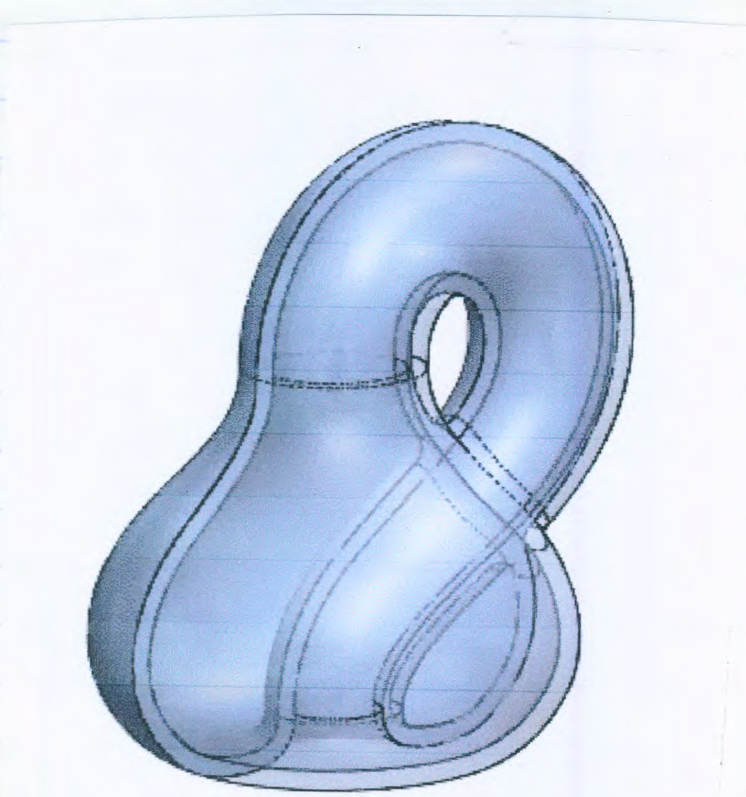
$$\text{Solid klein bottle} = \frac{D^2 \times I}{\text{הדבקת הבסיסים ע"י שיקוף}}$$

זוהי יריעה 3 ממדית עם שפה לא אוריינטבילית
השפה של זה היא בקבוק קליין

בהכללה: $\frac{D^{n-1} \times I}{\text{הדבקה בשיקוף}}$ היא יריעה לא אוריינטבילית

וכך נראית סביבה של לולאה לא שומרת אוריינטציה

← ולכן יריעה היא לא אוריינטבילית אם״ם היא מכילה כזה יצור



6/6/12

משפט יהי $A \subseteq X$ סגורה. ונניח יש קב' פתוחה U כך ש $A \subseteq U \subseteq X$ ו A נסג עוותי של U.

אזי ההעתקה $(X,A) \xrightarrow{\text{הטלה}} (X/A, *_A)$ משרה איזו' על כל ההומולוגיות

הסבר מה זה X/A ?

זהו מרחב מנה $X/_\sim$ ביחס ל: $a \sim b$ אם $a,b \in A$

כלומר מזהים את כל הנק' ב A לנק' אחת $[A] = *_A$

(הנק' הבודדת שהפכו מח' השקילות של A)

מה זה הומולוגיה ביחס לנקודה? $H_n(Y,\{a\})$

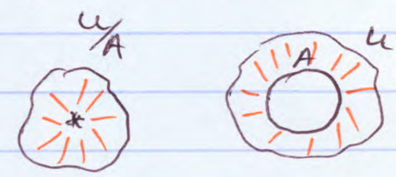
לפי הסדרה הארוכה $H_n(\{a\}) \longrightarrow \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\cong} H_n(Y,\{a\})$, $H_n(\{a\}) = 0$

$\Rightarrow$ נ"ז שמתקיים $H_n(Y,\{a\}) \cong \tilde{H}_n(Y)$

ולכן **מסקנה**: אם מתקיימים תנאי המשפט אז $H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$

הוכחה

A נסג עוותי של U ולכן נובע ש $*$ נסג עוותי של U/A



[יש פה החלפה סמויה של מנה ומכפלה
יש משפט כללי (תנאי מספיק) מתי זה מותר. בהומוטופיה על מנה זה עובד.]

כשמסתכלים על ההעתקות $(X,A) \hookrightarrow (X,U)$

$(X/A, *) \hookrightarrow (X/A, U/A)$

הן משרות **איזו'** על ההומולוגיות.

[כמו בסעיף $(X,A) \longrightarrow (X,U)$ לחתוך / נסג עוותי

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X,A) & \to & H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(X) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
H_n(U) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X,U) & \to & H_{n-1}(U) & \to & H_{n-1}(X)
\end{array}$$

ולפי למת ה 5 נקבל איזו']

לכן די להראות: $H_n(X,U) \cong H_n(X/A, U/A)$

6/12

משתמשים בקיצוץ (אפשר כי A סגורה)

$$H_n(X-A, U-A) \xrightarrow{\cong} H_n(X,U)$$

$$H_n(X/A - \{*\}, U/A - \{*\}) \xrightarrow{\cong} H_n(X/A, U/A)$$

אך $(X-A, U-A) = (X/A - \{*\}, U/A - \{*\})$ הם אותו הדבר!
בימין זיהינו את A לנקודת מרחב וזרקנו אותו ובשמאל ישר זורקים
אבל זה נותן את אותו המרחב

ולכן $H_n(X,U) \cong H_n(X/A, U/A)$

כל האיזו' פה מושרים ע"י הכלות, ניתן לעקוב ולראות
שהאיזו' הנוצר בין $H_n(X,A) \to H_n(X/A, *)$ הוא ההטלה.

— מש"ל —

אז כביכול הומולוגיה יחסית היא דבר מיותר, אבל כן צריך אותה
כי לא תמיד תנאי המשפט מתקיימים (למשל באוריינטציה: $M-\{x\}$
לא סגור ואין לו תת מרחב שהוא נסג עוותי שלו).
וזה גם יהיה חשוב לעניין הבא...

הומולוגיה של מרחבי CW

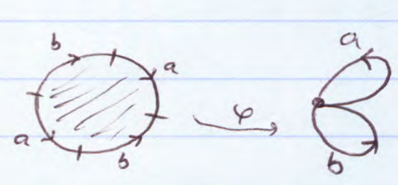
תזכורת

d_i = מס' תאים i מימדים (D^i)

הדבקה של תאי n מימדי $\varphi: \partial D^n \to K$
(K — שלד n-1 מימדי)

אצלנו מרחבי CW תמיד סופיים (מס' תאים סופי ומס' ההדבקות והמימדים.)

למשל $d_0 = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1$
אפשר לקבל טורוס:



6/6/12

$X :=$ 

אפשר גם לקבל משהו אחר

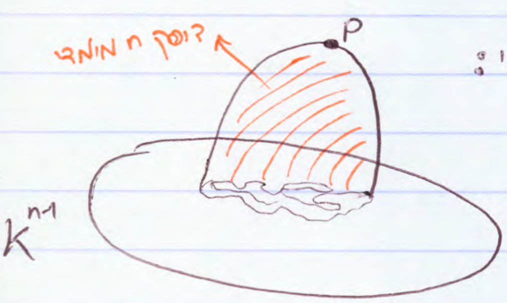
שזה אפילו לא שקול הומוטופית לטורוס!

(לפי הח. היסודית:
$\pi_1 T = \mathbb{Z}^2$
$\pi_1 X = F_2$)

נרצה להבין את ההומולוגיה של מרחבי CW

יהא K קומפלקס CW n ממדי.
לכל n K^n מסמן את השלב ה n-ממדי
(כלומר המרחב שקבלנו אחרי השלב ה n-י בבנייה)

מהו $H_i(K^n, K^{n-1})$?



נסתכל על הדבקה של דיסק בודד n ממדי:
נבחר נק' p במרכז הדיסק ה n ממדי

נרצה לברר מהו $H_i(K^n, K^n - \{p\})$
נשתמש בקיצוץ: נקצץ את K^{n-1} ואת
רב הדיסק ה n ממדי ("שרוול") חוץ מסביבה קטנה של p
מה שנשאר הוא דיסק מנוקב:

ולכן:

$$H_i(K^n, K^n - \{p\}) =$$
$$= H_i(D^n, D^n - \{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

במצב כזה יש נסיגה עוותית ל K^{n-1}
(ממוטטים את השרוול לשפת הדיסק)

ולכן לפי למת ה 5: $H_i(K^n, K^{n-1}) \cong H_i(K^n, K^n - \{p\})$

כעת נתייחס להדבקות של יותר מדיסק אחד:
נדביק את הדיסקים בשלבים למרחב K^{n-1} שהדבקנו עליו דיסק
אחד נקרא A ונדביק עליו עוד דיסק n ממדי ונבחר p_2
נק' במרכז הדיסק הנוסף.

6/6/12

ההכלה $A \hookrightarrow A \coprod_{\varphi} D^n - \{p_2\}$ היא נסג עותי

(ממטטים את $D^n - \{p_2\}$ לשפה)

(זה עובד כי ההדבקה היא לא על הדיסק הפתוח אלא על K^{n-1})

ובהכללה:

$$\underbrace{H_i(K^n,K^{n-1}) \cong H_i(K^n, \overbrace{K^{n-1} \coprod_{\varphi_1} D^n - \{p_1\}}^{A})}_{\text{לפי נסג עותי ולמת 5}} \cong H_i(K^n, A \coprod_{\varphi_2} D^n - \{p_2\}) \cong$$

$$\underbrace{\cong \dots}_{\text{חוזרים על התהליך לפי מס' ההדבקות }(d_n)} \cong H_i\left(\coprod_{i=1}^{d_n} D^n, \coprod_{i=1}^{d_n} D^n - \{p_i\}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{d_n} & i=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(משתמשים בקודם ונשארים עם אוסף דיסקים מנוקבים)

כעת נגדיר:

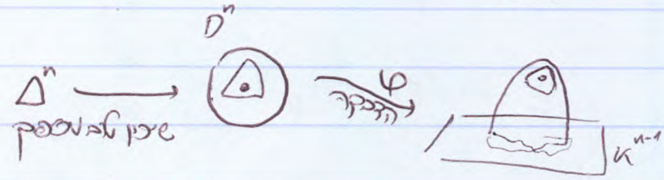
$$E_n := H_n(K^n,K^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^{d_n}$$

← אנחנו מכירים יוצרים מפורשים ל E_n:

יש d_n יוצרים: אחד לכל תא n מימדי

לפי $(K^n,K^{n-1}) \simeq (K^n, K^n - \{p_1,\dots,p_{d_n}\})$

יוצרים הם



כעת,

$$E_n = H_n(K^n,K^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(K^{n-1},K^{n-2}) = E_{n-1}$$

Δ מהסדרה של הזוג (K^n,K^{n-1})

i_* מהסדרה של הזוג (K^{n-1},K^{n-2})

נגדיר העתקה

$$\begin{array}{c} E_n \\ \downarrow t_n \\ E_{n-1} \end{array}$$

לפי: $t_n = i_* \circ \Delta$

6/6/12

9/12

טענה $t_{n-1}\circ t_n = 0$ לכל n

כי

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend left, "t_n"] & H_{n-1}(K^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & \underbrace{H_{n-1}(K^{n-1},K^{n-2})}_{=E_{n-1}} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend left, "t_{n-1}"] & H_{n-2}(K^{n-2}) \arrow[r, "i_*"] & E_{n-2} \end{tikzcd}$$

$\underbrace{H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(K^{n-1},K^{n-2}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-2}(K^{n-2})}$

שייך לסדרה המדויקת של (K^{n-1},K^{n-2})

ולכן $i_*\circ\Delta\circ i_* = 0$

ולכן ההרכבה הינו אפס.

דרך אחרת: נבין במפורש מה t_n עושה:

ראינו ש Δ לוקח שפה (בפועל שפה ∂) ! i_* זה הכלה

ולכן בעצם t_n פועל כלקיחת שפה וברור שלקיחת שפה

פעמיים זה 0 $(\partial^2=0)$.

⇐ קיבלנו קומפלקס שרשראות

$$\begin{array}{c} E_n \cong \mathbb{Z}^{d_n} \\ \downarrow t_n \\ E_{n-1} \cong \mathbb{Z}^{d_{n-1}} \\ \downarrow t_{n-1} \\ E_{n-2} \cong \mathbb{Z}^{d_{n-2}} \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

משפט $H_i(K) =$ ההומולוגיה ה-i של קומפלקס השרשראות $\{E_n\}$

העתקה $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^k$ זה מטריצה של שלמים

מתוך ההדבקות נרצה לפענח את t_n ואת המטריצות וכך לגלות את ההומולוגיה.

תכנית עבודה:

⊛ להוכיח את המשפט — טופו׳

⊛ בהינתן הדבקות לכתוב מטריצות — טופו׳

⊛ מתוך המטריצות לחשב חבורות שמתקבלות $\left(\frac{Ker}{Im}\right)$ — אלגברה ליניארית

6/6/12

טענות

(א) $H_i(K^n,K^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{d_n} & i=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

וכל יוצר חופשי בא בדיוק מתא אחד
היוצר הוא הומוו' עם הדבקה

(ב) $H_i(K^n) = 0$ עבור $n<i$

הוכחת ב: באינדוקציה על n (כאשר i נתון קבוע)
עבור $n=0$ K^0 זה אוסף סופי דיסקרטי של נקודות
ולכן $H_i(K^0)=0$
נניח נכונות הטענה לכל $k<n$
נוכיח ל- $n<i$
מהסדרה הארוכה המדויקת

$$\underset{\substack{\| \text{ לפי א} \\ 0}}{H_{i+1}(K^n,K^{n-1})} \to \underset{\substack{\| \text{ מהנחת האינדוקציה} \\ 0}}{H_i(K^{n-1})} \to H_i(K^n) \to \underset{\substack{\| \text{ לפי א} \\ 0}}{H_i(K^n,K^{n-1})}$$

אזי יש איזו' $H_i(K^n) \cong H_i(K^{n-1}) = 0$ ∎

(ג) ההכלה $K^n \hookrightarrow K$
משרה איזו' $H_i(K^n) \xrightarrow{\cong} H_i(K)$ לכל $i<n$

הוכחת ג:
אם $i<n$ נראה שההכלה $H_i(K^n) \longrightarrow H_i(K^{n+1})$ היא איזו':
מהסדרה הארוכה נקבל:

$$\underset{\substack{\| \text{ לפי א} \\ 0}}{H_{i+1}(K^{n+1},K^n)} \longrightarrow H_i(K^n) \xrightarrow{\cong} H_i(K^{n+1}) \longrightarrow \underset{\substack{\| \text{ לפי א} \\ 0}}{H_i(K^{n+1},K^n)}$$

$\left(\begin{matrix} i<n \\ \Downarrow \\ i+1<n+1 \end{matrix} \right)$

אם $i<n$ אז $i<n+1$, $i<n+2$, ...
ונקבל שרשרת הכלות שהם איזו':

$$H_i(K^n) \xrightarrow{\cong} H_i(K^{n+1}) \xrightarrow{\cong} H_i(K^{n+2}) \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} H_i(K^m) = H_i(K)$$

והרכבת כל ההכלות נותן הכלה שהיא איזו'. ∎

המשמעות של (ג): בשביל לדעת את ההומולוגיה ה-i של המרחב כולו, מספיק לדעת את ההומולוגיה של השלד ה-$i+1$. שאר התאים לא משנים את ההומולוגיה ה-i.

<u>הוכחת המשפט</u>

נרשום את הקומפלקס $H_{n+1}(K^{n+1},K^n) \xrightarrow{t_{n+1}} H_n(K^n,K^{n-1}) \xrightarrow{t_n} H_{n-1}(K^{n-1},K^{n-2})$

רוצים להראות שההומולוגיה של זה היא בדיוק $H_i(K)$

נרשום במפורש את ההעתקות ונוסיף עליהן מהסדרות המדויקות:

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_n(K^{n+1},K^n) \overset{(\text{ג})}{=} 0 & \\
0 \overset{(\text{ב})}{=} H_n(K^{n-1}) \arrow[dr] & & H_n(K^{n+1}) \cong_{(\text{ג})} H_n(K) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(K^n) \arrow[ur, "\text{על}"] \arrow[dr, "i\ \text{חח\"ע}"] & & & \\
H_{n+1}(K^{n+1},K^n) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "t_{n+1}"] & & H_n(K^n,K^{n-1}) \arrow[rr, "t_n"] \arrow[dr, "\Delta"] & & H_{n-1}(K^{n-1},K^{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(K^{n-1}) \arrow[ur, "j\ \text{חח\"ע}"] & \\
 & & H_{n-1}(K^{n-2}) \overset{(\text{ב})}{=} 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

בדיאגרמה המפורשת הנ"ל האלכסונים הם סדרות מדויקות והישר האופקי הוא קומפלקס השרשראות

$$H_n(K) \overset{(\text{ג})}{=} H_n(K^{n+1}) \underset{\substack{\text{נקר}\\ \text{על}}}{\cong} \frac{H_n(K^n)}{\mathrm{Im}\,\Delta} \overset{?}{=} \frac{\ker t_n}{\mathrm{Im}\, t_{n+1}}$$

$i : H_n(K^n) \to H_n(K^n,K^{n-1})$ חח"ע ולכן $H_n(K^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\, i$ איזו' לפי נתר.

$$i(\mathrm{Im}\,\Delta) = i\big(\Delta(H_{n+1}(K^{n+1},K^n))\big) \overset{\text{הגדרת } t_{n+1}}{=} t_{n+1}(H_{n+1}(K^{n+1},K^n)) = \mathrm{Im}\, t_{n+1}$$

ולכן i משרה איזו' $\dfrac{H_n(K^n)}{\mathrm{Im}\,\Delta} \xrightarrow{\cong} \dfrac{\mathrm{Im}\, i}{\mathrm{Im}\, t_{n+1}}$

← נשאר להראות $\mathrm{Im}\, i = \ker t_n$ ...

6/6/12

נשאר להוכיח $\operatorname{Im} i = \ker t_n$

ידוע $\operatorname{Im} i = \ker \Delta$ כי זה חלק מסדרה מדויקת של (K^n, K^{n-1})

ולכן נותר להראות ש $\ker t_n = \ker \Delta$

לפי ההגדרה: $t_n = j \circ \Delta$

אך j חח"ע ולכן לא משנה את הגרעין (לא מוסיף דברים שהולכים ל 0)

ולכן $\ker t_n = \ker \Delta$

— מש"ל —

אם כן, כדי למצוא את $H_n(K)$ יש לחשב את $\ker t_n / \operatorname{Im} t_{n+1}$

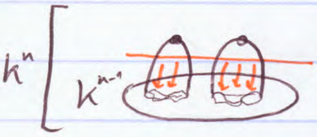
הרצאה 11 – 13/6/12

תזכורת

בהנתן מרחב CW סופי בנינו קומפלקס שרשראות סופי

(סופי במובן שבכל הרמות ≠0 הוא סופי). $E_n = H_n(K^n, K^{n-1})$

על היוצרים של E_n:



עשינו קיווץ ובעזרת נסג עיוותי (שקילות הומוטופית)

ולמת ה-5 קיבלנו $E_n \cong \mathbb{Z}^{d_n}$

כשכל יוצר הוא שיכון של סימפלקס סביב אחת הנקודות המנוקבות

גם בקומפלקס המפורש ברור מיהו היוצר (ולא רק אחרי הנסג העיוותי):

$$\Delta^n \xrightarrow[\text{הומאו'}]{h} D^n \xrightarrow[\text{הדבקה}]{\varphi}$$

(ליתר דיוק: $\Delta^n \xrightarrow[\cong]{h} D^n \xrightarrow{\text{הכלה}} D^n \sqcup K^{n-1} \xrightarrow[\text{זיהוי תחת הדבקה}]{\text{מנה}} X$)

זה יוצר בקומפלקס המפורש (שכן השפה שלו ב-K^{n-1}).

יש לנו העתקת שפה $E_n \xrightarrow{t_n} E_{n-1}$

כאשר $t_n = \partial \circ i_*$

$$\begin{tikzcd} & H_{n-1}(K^{n-1}) \arrow[dr, "i"] & \\ E_n \arrow[ur, "\partial"] \arrow[rr, "t_n"'] & & E_{n-1} \end{tikzcd}$$

ראינו $H_i(K) = \dfrac{\ker t_n}{\operatorname{Im} t_{n+1}}$ $\qquad t_n : \mathbb{Z}^{d_n} \to \mathbb{Z}^{d_{n-1}}$

ולכן מנסים לפענח מה t_n עושה באופן גיאומטרי.

אם נבין מה t_n עושה על כל יוצר נבין מהו ההומומ' הזה.

$t_n = \partial \circ i_*$ אבל ∂ הוא למעשה שפה

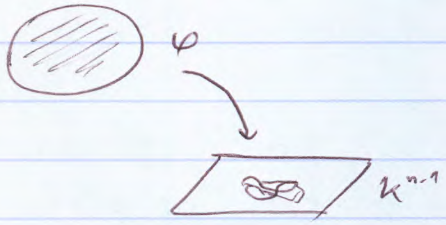
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H_n(D^n, \partial D^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{n-1}(\partial D^n) & \to 0 \\ & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \end{array}$$

ולכן בפעולת השפה מקבלים שהיוצר של $H_n(D^n, \partial D^n)$

הולך ליוצר של השפה / הספירה

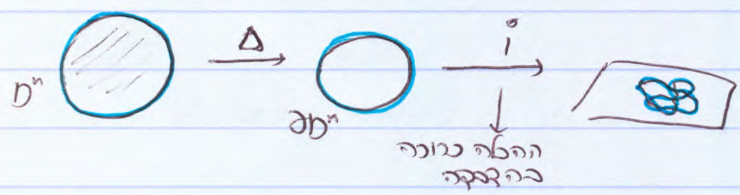
13/6/12

איזון: תמונת היוצר של E_n תחת t_n המתאים לדיסק n מימדי נתון הוא תמונת היוצר של $H_{n-1}(\partial D^n)$ תחת העתקת ההדבקה של אותו הדיסק.

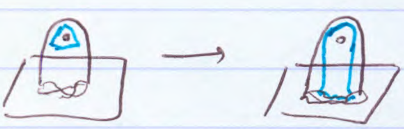


(כמו בון קמפן: מה שהדיסק תורם זה לולאת השפה תחת העתקת ההדבקה)

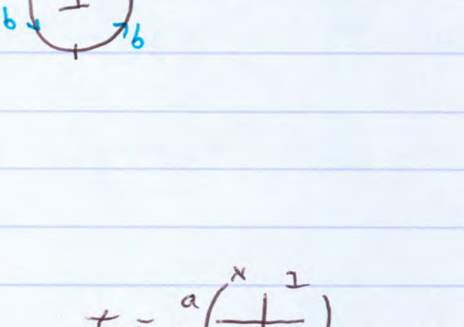
$t_n = \partial \circ i_*$



גם אם נעדיף להבין ביוצר כשיכון סימפלקס סביב נק' מנוקבת נמשיך את שפת הסימפלקס בהתאם לנסג העיוות (כך שהשפה תהיה ב-K^{n-1}) ושוב נקבל את השפה של הדיסק לפני ההדבקה



(הציור כמובן לא מדויק/פורמלי, הרעיון הוא למתוח את הסימפלקס מכל הכיוונים עד להדבקה)



דוגמא

$d_2 = 2$

$d_1 = 2$

$d_0 = 1$

$$E_2 = \mathbb{Z}^2$$
$$E_1 = \mathbb{Z}^2 \quad t_2 = \left(\;\; \right)_{2\times 2}$$
$$E_0 = \mathbb{Z} \quad t_1 = (\;,\;)_{1\times 2}$$

⊛ נבין את t_2:

$$t_2 = \begin{array}{c|cc} & א & ב \\ \hline a & & \\ b & & \end{array}$$

קל לראות שהשפה של א הולך ל- $4a+3b$

ולכן היוצר המתאים ל-א הולך ל-$4a+3b$

$t_2 = \begin{pmatrix} 4 & \\ 3 & \end{pmatrix}$ -!

13/6/12

באותו אופן המוגדר של ב הולך לאן שהשפה של ב הולכת תחת העתקת ההדבקה : שזה $3b$ ולכן

$$t_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

⊛ נבנה את t_1 : $t_1 = p(\ ^a ,\ ^b)$

לאן הולך המוגדר b ? לאן שהשפה שלו הולכת תחת ההדבקה

כיוון שהשפה שלו זה : $\circ - \bullet - \circ$ + כאושר. • הולך ל p

אזי $t_1(b) = p - p = 0$

וכך גם עבור a ולכן : $t_1 = (0, 0)$

(בעצם , $\partial a = 0, \partial b = 0$).

⊛ עכשיו רוצים לפתח את הגרעין והתמונה

$H_0 = \frac{\ker 0}{Im\, t_1}$ t_1 זה העתקת האפס ולכן $H_0 = \mathbb{Z} \leftarrow \tilde{H}_0 = 0$

$H_2 = \frac{\ker t_2}{Im\, 0}$ $t_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ הוא עם דטרמיננטה $7 \neq 0$

ולכן (לפי ליניאריות) הגרעין ברציונלים הוא 0

ולכן בוודאי גם בשלמים הגרעין הוא 0.

ולכן $H_2 = 0$

$H_1 = \frac{\ker t_1}{Im\, t_2} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (4,3), (0,3) \rangle}$ כדי לפרש את זה צריך לעבור לבסיס יותר פשוט

(בסיס כזה שהמטריצה אלכסונית או בערך אלכסונית)

זה שלב אלגברי : אלגוריתם אותו נלמד בהמשך.

נשוב את ההגדרה שלנו מהם המס' השלמים שבמטריצה (מקדמי התמונה של השפה) :

כדי לבדוק את המקדמים מספיק שיש נק' טובה בשלב ה n-1 מימדי

נקודה טובה = נק' בפנים של דיסק n-1 מימדי שיש לה סביבה כך ש

שהתמונה ההפוכה שלה תחת העתקת ההדבקה

היא איחוד זר של סביבות נק שנמצאים

העתקת ההדבקה לכל אחת מהן הוא הומאו'.

13/6/12

4/12

כך צריך לעשות לכל העתקה שפה. כלומר לכל דופק n מימדי בנפרד יש להבין את ההדבקה על התק' הטובה.

בוחרים אוריינטציה ל"ספ ולדופק ה n+1 מימדי. אם ההדבקה בסביבת הנק' הטובה שומרת אוריינטציה אז הוא תורמת מקדם חיובי, ואם ההדבקה לא משמרת את האוריינטציה היא תורמת מקדם שלילי.

- אבל בשביל זה דרוש קודם להבדיק את זה שלספירה יש אוריינטציה:

משפט אם M יריעה n מימדית ו- $H_n(M)=\mathbb{Z}$ אז M יריעה אוריינטבילית.

הערה אם M סגורה אז הכיוון השני גם נכון. לומר פרוט: יריעה n מימדית מקיימת $H_n(M)=\mathbb{Z} \iff$ M סגורה ואוריינטבילית

(ביריעה לא סגורה לא יתכן $H_n(M)=\mathbb{Z}$ כי M שקולה הומוטופית למבנה n-1 מימדי.)

הוכחה

נקח יוצר של $a\in H_n(M)=\mathbb{Z}$

לכל נק' $p\in M$ יש העתקה

$$H_n(M)\hookrightarrow H_n(M,M-\{p\})$$
$$[a]\longmapsto i^p_*(a)$$

תמונת היוצר a תגדיר יוצר לכל נק' כך שהבחירה עקבית.

(הגדרת אוריינטציה זה שאפשר לבחור יוצר בכל סביבה בבת אחת. כאן ניתן לבחור בבת אחת בכל M)

$\Leftarrow$ $H_n(S^n)=\mathbb{Z}$ ולכן $S^n=\partial D^{n+1}$ אוריינטבילי!

(-או- כי S^n פשוט קשר (עבור כל n>1) וראינו שכל פשוט קשר אוריינטבילי)

13/6/12

5/12

נחזור להסתכל על הדבקות של נק' טובה

$$H_n(D^n,\partial D^n) \cong H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n) \xrightarrow[\cong]{\Delta} H_{n-1}(\partial\Delta^n)$$

$$\text{יוצר } I_n \longmapsto \partial I_n$$

$\partial\Delta^n = S^{n-1}$ הוא היוצר

נבחר נק' בדופן סימפלקס Δ^n
האוריינטציה המושרית על הנק' לא משפיעה
מבחינת הדבקות. גם אם נעשה חלוקה בריצנטרית
(שים לב ש חלוקה בריצנטרית של יוצר זה עדיין יוצר)
מה שמשנה באוריינטציה הוא רק הסימפלקס הקטן שמכיל את הנק'

לכן כשנדביק את שפת הסימפלקס לשלד תמונת כל החלקים הקטנים
לא תשנה חוץ מאלו שמודבקים על הנק' הטובה.

נניח יש m הדבקות על הנק' הטובה בצורה ששומרת אוריינטציה
ו- n הדבקות על הנק' הטובה בצורה הופכת אוריינטציה
אז המקדם המתאים ליוצר זה הוא $m-n$

את כל המקדמים האלו מסכמים במטריצה.

13/6/12

6/12

חישוב הומולוגיה של משטחים בעזרת מבני CW

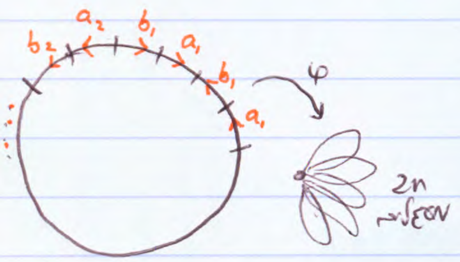
nT — עכשיו קל לנו לומר שהוא אוריינטבילי שכן ההומולוגיה השניה $\mathbb{Z}$

ל-nT מבנה CW:

$d_0 = 1$

$d_1 = 2n$

$d_2 = 1$



$4n$ קטעים

$$E_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{t_2 = (\ )_{2n\times 1}} E_1 = \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{t_1 = (\ )_{1\times 2n}} E_0 = \mathbb{Z}$$

$t_1 = (0, 0, \dots, 0)$

כי כל לולאה שפתה היא $0 = \bullet - \bullet$

על כל נקי' עוברים פעם בכיוון אחד $(+1)$ ופעם בכיוון השני (-1).

ולכן $t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

← כל העתקות הן 0 ולכן הגרעין הוא הכל והתמונה היא 0

ולכן ההומולוגיות:

$H_0(nT) = \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_0 = 0$

$H_1(nT) = \mathbb{Z}^{2n}$

$H_2(nT) = \mathbb{Z}$

nP — nP לא אוריינטבילי

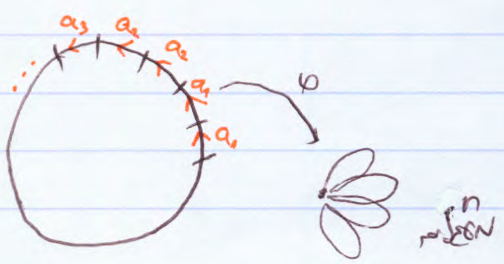
לפי מה שלא הוכחנו על יריעות סגורות: ההומולוגיה של nP היא 0 (!!) כי מדובר בעצם במבנים שלא אוריינטבילים

מבנה CW של nP:

$d_0 = 1$

$d_1 = n$

$d_2 = 1$

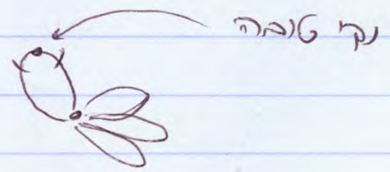


13/6/12

7/12

$$E_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{t_2 = (\ )_{n\times 1}} E_1 = \mathbb{Z}^n \xrightarrow{t_1 = (\ \ )_{1\times n}} E_0 = \mathbb{Z}$$

כמו קודם : $t_1 = (0, \dots, 0)$



על כל נק' חולפים פעמיים באותו כיוון

ולכן
$$t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H_0(np) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{Im} t_1} = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \qquad (*)$$

בשביל H_1, H_2 צריך להבין את t_2

$$t_2 : 1 \longmapsto (2, 2, \dots, 2)$$

$\ker t_2 = 0$ כי בברור t_2 חח"ע ולכן $H_2(np) = 0$ $(*)$

$$H_1 = \mathbb{Z}^n \Big/ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

כדי להבין את הגורם נחליף בסיס של $\mathbb{Z}^n$ לבסיס

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \dots, \underset{v_n}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

כדי שזו תהיה החלפת בסיס הדטרמיננטה צריכה להיות ± 1 (הפיכה מעל $\mathbb{Z}$)

ואמנם
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

בבסיס החדש

$$\underset{(2\sum e_i)}{\begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{(2\cdot v_1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$H_1(np) = \frac{\mathbb{Z}^n}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}{\langle 2v_1 \rangle} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$$

13/6/12

8/12

באופן כללי

עבור קומפלקס ממימד m

$$\mathbb{Z}^{d_m} \xrightarrow{(\ )_{d_{m-1}\times d_m}} \mathbb{Z}^{d_{m-1}} \xrightarrow{(\ )_{d_{m-2}\times d_{m-1}}} \mathbb{Z}^{d_{m-2}} \to \cdots \to \mathbb{Z}^{d_0} \to 0$$

המטרה היא לעשות החלפת בסיסים בכל $\mathbb{Z}^{d_i}$ כך שהמטריצות כולן יהיו אלכסוניות או מהצורה של "מעטפה עם בלוק"

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{matrix}_{k\times k} \\ & 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \neq a_i \in \mathbb{Z}$$

נניח והגענו למצב שכל המטריצות מהצורה הזו רוצים להבין גרעין מודולו תמונה:

$$\frac{\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_r \end{matrix} \\ & 0 \end{pmatrix}_{?\times n}}{\operatorname{Im}\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k \end{matrix} \\ & 0 \end{pmatrix}_{n\times l}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_r \end{matrix} \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot x_{n-r+1} \\ \vdots \\ b_r \cdot x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{Ker} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \}\, n-r \end{array}$$ (#)

$$\begin{pmatrix} \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \begin{matrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_r \end{matrix} \\ 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הגרעין נפרש לפי n-r עמודות הם

$$\operatorname{Ker} = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_{n-r}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k \end{matrix} \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_{l-k+1} \\ \vdots \\ a_k \cdot x_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ (#)

באופן דומה התמונה נוצרת ע״י k העמודות

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k \end{matrix} \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} = \langle a_1 v_1, \dots, a_k v_k \rangle$$

13/6/12

סכה:

$$\ker/\mathrm{Im} = \frac{\mathbb{Z}_{v_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{v_{n-r}}}{\langle a_1v_1,\dots,a_kv_k\rangle} = \mathbb{Z}/a_1 \oplus \mathbb{Z}/a_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_k \oplus \mathbb{Z}^{n-r-k}$$

← הדיק לתחלף את הבסיסים באופן עקבי כדי לקבל צורה מדורגת
הישג אלגוריתם פשוט שנלמד בהמשך.

כל חב' אבלית נוצרת סופית A הינו מהצורה
$\mathbb{Z}/m_1 \oplus \mathbb{Z}/m_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}^n$

<u>הגדרה</u> n נקרא ה rank של החבורה A $(\operatorname{rank} A)$.

n זה תנאי <u>אינווריאנט</u> של החבורה (לא תלוי בפירוק)

לפי דרגות המטריצות (שסומן ב $r(t_n)$) קבלנו שהדרגה של ההומולוגיה הינו

$$\operatorname{rank} H_n = d_n - r(t_{n+1}) - r(t_n)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{d_{n+1}} \arrow[d, "t_{n+1}"] \\ \mathbb{Z}^{d_n} \arrow[d, "t_n"] \\ \mathbb{Z}^{d_{n-1}} \end{tikzcd}$$

($d_n - r(t_n)$ זה הוקטורים בגרעין
$r(t_{n+1})$ זה הוקטורים שהורגנו בתמונה)

נסכום את הדרגות עם סימנים מתחלפים:

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H_n) = \sum (-1)^n \left(d_n - r(t_{n+1}) - r(t_n)\right) = \sum (-1)^n d_n$$

כל דרגה מופיעה פעמיים
פעם עם סימן + ופעם עם סימן -

כיוון שהדרגות הן אינווריאנט טופ' (ואפילו הומוטופי) כך
גם הסכום המתחלף $\sum(-1)^n d_n$ ולכן הוא אינווריאנט
טופ' (ואפילו הומוטופי)!
(וזה למרות ש d_n עצמם הם <u>לא</u>. יותר מזה:
לאותו מרחב טופ' יכולים להיות כמה מבנים CW)

← זה נקרא <u>מציין אוילר</u> של המרחב

$$\boxed{\chi(X) = \sum_n (-1)^n d_n}$$

13/6/12

10/12

מאפיין אוילר הינו האינווריאנט הטופ' ה I שגילו.

למשל: $\chi(S^n) = 1+(-1)^n$

(למשל בינתיים לפי $d_0=1, d_n=1$)

כל הפאונים הם ספירה S^2 ולכן לכולם מציין 2.

הומולוגיה סימפליציאלית

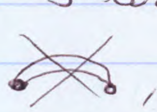
ההומולוגיה שתיארנו היא לא ההומולוגיה הראשונה שבנו. ההגדרה של פואנקרה היתה רק על מרחבים מאוד מיוחדים והיתה לה צורה אחרת.

תאור המרחב

⊛ בהתחלה יש קודקודים • • • • • •

⊛ מדביקים צלעות בלי לולאות וצלעות כפולות

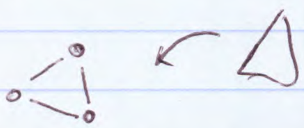
כלומר אסור



(כך כל צלע מוגדרת כתת קב' מגודל 2 של קב' הקודקודים)

⊛ מדביקים סימפלקס דו ממדי: מדביקים את הדפנות

שפת סימפלקס חד ממדי רק אם יש כבר 3 צלעות של משולש בשלב הקודם



וכן הלאה...

⊛ בכל שלב מותר להדביק רק אם כבר מוכן מקום לשפה בשלב הקודם

← זהו קומפלקס סימפליציאלי (Simplicial complex)

ובסופו של דבר זהו אובייקט קומבינטורי לחלוטין

13/6/12

11/12

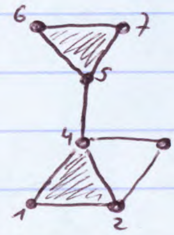
תאור קומבינטורי:

יש אוסף קודקודים V ואוסף סימפלקסים $K \subseteq P(V)$

$A \in K$ נקרא תא n מימדי אם יש ב A $n+1$ נק' (קודקודים).

ו K מקיים שאם $A \in K$ ו $B \subseteq A$ אז $B \in K$

דוגמא



$|V| = 7$

סימפלקסים 0 מימדיים: $\{1\}, \{2\}, ---, \{7\}$

סימפלקסים 1 מימדיים:

$\{1,2\}, \{2,4\}, \{1,4\}, \{1,3\}, \{4,3\}$

$\{4,5\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}$

סימפלקסים 2 מימדיים: $\{1,2,5\}, \{5,6,7\}$

(שים לב שכל תתקבו' שלהם הינו סימפלקס 1 מימדי)

← האוביקט הבא מגדיר מטריצות לפי המימד הקומבינטורי:

כל עמודה מתאימה לאחד מהסימפלקסים במימד n

כל שורה מתאימה לסימפלקס במימד $n-1$

ממלאים עמודה באופן הבא:

מסתכלים בסימפלקס המתאים, הולכים לפי סדר הקודקודים

וכל פעם משמיטים קודקוד: הדופן שמול הקודקוד מקבל

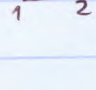
סימן מתחלף (± 1) במקום המתאים לו במטריצה.

(סימפלקסים $n-1$ מימדיים שלא מופיעים בסימפלקס הn מימדי מקבלים 0)

בדוג' שלנו

$$\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^9 \to \mathbb{Z}^7 \to 0$$

$$\begin{array}{c|cc} & \{1,2,4\} & \{5,6,7\} \\ \hline \{1,2\} & 1 & 0 \\ \{2,4\} & 1 & 0 \\ \{1,4\} & -1 & 0 \\ \{6,7\} & 0 & 1 \\ \{5,6\} & 0 & 1 \\ \{5,7\} & 0 & -1 \end{array}$$

הסבר: מסתכלים ב- 

קודם משמיטים את 1, ו $\{2,4\}$ מקבל $+1$

אח"כ משמיטים את 2 ו $\{1,4\}$ מקבל -1

בסוף משמיטים את 4 ו $\{1,2\}$ מקבל 1

13/6/12

12/12

זהו מקרה פרטי של הבניה שלנו (פה מדביקים כל דבר רק פעם אחת, ולכן יש רק ±1 ו-0 בטבלה).

מאפיין אוילר במבנה כזה נקרא מס' בטי והוא חושב באופן מסובך מהמטריצות. פואנקרה היה צריך להוכיח שזה אינווריאנט טופו' (זה לא ברור מהבניה הקומבינטורית הנ"ל).

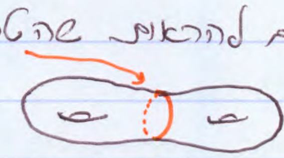
עד היום $\beta_n(X) = \text{rank}\, H_n$ נקראו מס' בטי של X ?

ההומולוגיה הסימפליציאלית הוגדרה Ker/Im לפי המטריצות. לקחת מרחב, ולחלק אותו כאוסף כזה של סימפליציאלים נקרא "לשלש" את המרחב והוכיחו שאם המרחבים שקולים הומוטופית מקבלים את אותה החבורה.

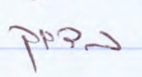
לעומת זאת ההומולוגיה שאנחנו התחלנו איתה היא הומולוגיה סינגולרית.

גם היום יש הרבה טעם בהומו' סימפליציאלית: יש דברים שניתן להבין מיידית שם וגם הגדרות של ההומו' הסימפליציאלית הם מפורשים (לא צריך הסתכלות גבוה: הכל נגיש במידע הקומבינטורי)

למשל: אם רוצים להראות שהטבעת הזו 0 בהומולוגיה של $2T$.



זה קל להראות בסימפליציאלי. נראה שהוא שפה. נקח שילוש של המשטח בצד ימין עם סימונים כך שכולם מתבטלים. השפה של זה היא בדיוק ○



למשל: נראה שהלולאות הומוטופיות. נקח שילוש של החלק הפנימי כך שהחלק התואמה באוריינטציה (אפשרי כי $3T$ אוריינטבילי). נקבל את 2 הלולאות עם סימונים הפוכים כשפה.

הרצאה 12 - 20/6/12

אלגוריתם לחישוב ההומולוגיה

תזכורת

$$E_{n+1}=\mathbb{Z}^{d_{n+1}} \xrightarrow{\ t_{n+1} = d_n \overset{d_{n+1}}{\boxed{}}\ } E_n=\mathbb{Z}^{d_n} \xrightarrow{\ t_n = d_{n-1}\overset{d_n}{\boxed{}}\ :\ \mathbb{Z}^{d_n}\to\mathbb{Z}^{d_{n-1}}\ } E_{n-1}=\mathbb{Z}^{d_{n-1}}$$

רוצים לעשות שינוי בסיס כך שכל המטריצות יקבלו צורה $\begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & * & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

(כדי שזה יהיה החלפת בסיס (אוטומורפיזם) הדטרמיננטה של מטריצת הטרנספורמציה צריכה להיות ± 1 (הפיכים ב-$\mathbb{Z}$))

פעולות מותרות

א) החלפת סדר 2 איברי בסיס

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ב) להכפיל אחד מאיברי הבסיס ב -1

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ג) להוסיף איבר בסיס לאיבר בסיס אחר

כלומר לקבל בסיס: $v_1,\dots,\underbrace{v_i+v_j}_{\text{מקום } i},\dots,v_j,\dots,v_n$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & 1 \cdots 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

← פעולות על עמודות זה החלפת בסיס בתחום

פעולות על שורות זה החלפת בסיס בטווח

(לא באמת צריך את k מה שמתחת ל-u_q זה בוודאי 0
ולכן פועלים על $u_1,\dots,u_q$ לא ישפיע על t_{n-1})

← אם כן מצאנו שניתן לדרג מטריצות באופן עקבי.

20/6/12

2/8

אלגוריתם

אם לפנינו מטריצת ה-0 סיימנו.
אחרת, נקח איבר $\neq 0$ עם ערך מוחלט מינימלי
ונעביר אותו לפינה השמאלית עליונה

ערך מינימלי $\boxed{a}$

20/6/12

4/8

הומולוגיה עם מקדמים

נזכר בהגדרה של הומולוגיה סינגולרית $C_n(X)=\{\sum n_i\sigma_i,\ n_i\in\mathbb{Z}\}$
ניתן להכליל לגבי מקדמים אחרים:

<u>הכללה</u> תהי G חבורה אבלית כלשהי
נגדיר $C_n(X;G)=\{\sum n_i\sigma_i : n_i\in G\}$

<u>בפרט</u> אם G חוג עם יחידה אז $\sigma=1\cdot\sigma\in C_n(X;G)$
<u>ובפרט בפרט</u> אם G שדה

הומולוגיה כרגיל תסומן: $H_n(X;G)$
ויש גם הומולוגיה יחסית: $H_n(X,A;G)$

<u>הרחבה</u> (למי שמכיר טנזורים)
במעשה: $C_n(X;G):=C_n(X)\otimes G$
$$\partial: C_n\otimes G\xrightarrow{\partial\otimes Id} C_{n-1}\otimes G$$

וההומולוגיה מצומצמת מוגדרת ע"י $\varepsilon\otimes Id$
$$\varepsilon\left(\sum g_i\sigma_i\right)=\sum g_i$$

הומולוגיה עם מקדמים ב-$\mathbb{Z}$ היא הכי טובה. היא נותנת את כל האינפורמציה שניתן לקבל כי אם יודעים את ההומולוגיות H_{n-1},H_n מעל $\mathbb{Z}$ אז ניתן לחשב את H_n מעל כל G שהוא. אך ההפך לא נכון!

← אז למה בכלל להשתמש בחבורות אחרות?
לפעמים החישובים יותר נוחים. במיוחד $\mathbb{Z}/2$ שימושי
וגם יכולה להיות משמעות אלגברית לאיברי ההומולוגיה הנ"ל.

למשל: בהומולוגיה מעל $\mathbb{Z}$ בשביל שאיבר יהיה מחזור כל פאה שיש שפה משותפת צריך סימנים $\pm$ בהתאמה כדי שיתבטלו. מעל $\mathbb{Z}/2$ $+=-$ ולכן מעל $\mathbb{Z}/2$ יש מחזורים שאין בהומולוגיה מעל $\mathbb{Z}$.

20/6/12

5/8

לגבי מרחבי CW

ניתן לחשב ולראות ש- $H_n(K^n,K^{n-1};G) = \bigoplus_{\text{כמס' התאים}} G$

המטריצות d_n הם עדיין מעל השלמים (שכן זה מתאר את מס' ההדבקות)

טענה אם A מטריצה מעל השלמים עם דטרמיננטה ± 1 אז $A: G^n \to G^n$ הינו איזו/אוטו' של החבורה.

כי קל לראות שזה הומומ'.
ומאותם שיקולים של לינאריות: ברור שזו מטריצה הפוכה.

$\mathbb{R}P^n$

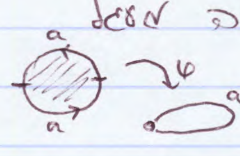
הגדרנו מרחבים פרויקטיביים $\mathbb{R}P^n = S^n/_{v\sim -v} = D^n/_{\substack{v\in\partial D^n \\ v\sim -v}}$

השפה של זה $\partial D^n/_{v\sim -v} = S^{n-1}/_{v\sim -v} = \mathbb{R}P^{n-1}$

← ל-$\mathbb{R}P^n$ יש מבנה CW:

באינדוקציה $\mathbb{R}P^0$ זה נקודה

$\mathbb{R}P^1$ זה מעגל 

$\mathbb{R}P^2$ 

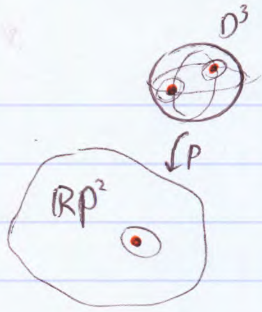
ובאופן כללי $D^n \rightsquigarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ מדביקים את שפת D^n ל-$\mathbb{R}P^{n-1}$

ההדבקה הינו תמיד הכיסוי הכפול $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ (העתקת המנה).

← אם כן מבנה CW של $\mathbb{R}P^n$ רואים שם בדיוק דופק אחד מכל מימד ולכן $t_n = \square_{1\times 1}$ הם מס' שלמים.

20/6/12

6/8



נקח נק' טובה ב $\mathbb{R}P^n$

לכל נק' יש 2 נק' במקור

(התמונה ההפוכה $p^{-1}(x)$ מכילה 2 נק')

והזיהוי הוא ע"י העתקה אנטיפודית A

אם כן $t_k = 0,2$ תלוי אם A שומרת אוריינטציה (ואז $t_k=2$)

או לא שומרת אוריינטציה (ואז $t_k=0$)

וזה תלוי במימד:

עבור ספירה זוגית $A\sim -Id$ ← הופך אוריינטציה

עבור ספירה אי זוגית $A\sim Id$ ← שומר אוריינטציה

ולכן נוכל לכתוב $t_k : E_k \longrightarrow E_{k-1}$

$t_k = 1+(-1)^k$

הדבקה ברמת החלק השני של $\partial D^n \cong S^{n-1}$

נחשב הומולוגיה של $\mathbb{R}P^n$:

$$\begin{array}{rl}
 & \vdots \\
 & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 0 \\
\text{אי זוגי} & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 2 \\
\text{אי זוגי} & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 0 \\
\text{אי זוגי} & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 2 \\
 & \mathbb{Z} \\
 & \vdots \\
 & \downarrow 2 \\
E_1 = & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 0 \\
E_0 = & \mathbb{Z} \\
 & \downarrow 0 \\
 & 0
\end{array}$$

יוצא דופן!

⊛ במקום גנרי פנימי (באמצע)

— אם i זוגי: $E_i = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$

$H_i = \frac{\ker 2}{\mathrm{Im}\, 2} = 0$

— אם i אי זוגי: $E_i = \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$

$H_i = \frac{\ker 0}{\mathrm{Im}\, 2} = \mathbb{Z}/2$

⊛ $i=0$: $\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$ ← $H_0 = \mathbb{Z}$

⊛ $i=n$

— אם n זוגי: $E_n = 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$

$H_n = \frac{\ker 2}{\mathrm{Im}\, 0} = 0$

— אם n אי זוגי: $E_n = 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$

$H_n = \mathbb{Z}$

20/6/12

7/8

<u>מסקנה</u>

$$H_i(\mathbb{R}P^n)=\begin{cases} 0 & 0<i<n \text{ זוגי} \\ \mathbb{Z}/2 & 0<i<n \text{ אי זוגי} \\ \mathbb{Z} & i=0 \\ \underset{n \text{ זוגי}}{0},\ \underset{n \text{ אי זוגי}}{\mathbb{Z}} & i=n \end{cases}$$

<u>מסקנה</u> $\mathbb{R}P^n$ אם n זוגי הוא לא אוריינטבילי,
ואם n אי זוגי הוא אוריינטבילי

<u>לדוגמה</u>

	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{R}P^4$	$\mathbb{R}P^5$
5	0	0	0	$\mathbb{Z}$
4	0	0	0	0
3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
2	0	0	0	0
1	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

עכשיו נחשב את זה להומולוגיות מעל $\mathbb{Q}$ ומעל $\mathbb{Z}/2$:

<u>מעל $\mathbb{Q}$</u>

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q}$$

מעל $\mathbb{Q}$ עדיין מתקיים $\quad \mathrm{Im}\,0=0$, $\ker 2=0$

אבל מעל $\mathbb{Q}$: $\quad \mathrm{Im}\,2=\mathbb{Q}$

$$H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Q})=\begin{cases} 0 & 0<i<n \\ \mathbb{Q} & i=0 \\ 0 \xleftarrow{\text{זוגי}} & i=n \\ \mathbb{Q} \xleftarrow{\text{אי זוגי}} & \end{cases}$$

20/6/12

8/8

מעל $\mathbb{Z}/2$ כל העתקות הן 0 !

ולכן תמיד הגרעין הוא כל $\mathbb{Z}/2$ והתמונה היא 0

ולכן לכל $1\le i\le n$: $H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$

זה אומר שבכל הרמות יש מחזור מודולו 2 (שזה מחזור שלא צריך להתאים לו סימנים) אפילו שבהומולוגיה הרגילה אין מחזור.

מאפיין אוילר

כל החשבון שעשינו עם הדרגות תקף גם להומולוגיה עם מקדמים ולכן מאפיין אוילר נשאר אותו דבר
← מאפיין אוילר שווה מעל כל חבורה!

למשל

$$\chi(\mathbb{R}P^n)=\begin{cases}1 & \text{n זוגי}\\ 0 & \text{n אי זוגי}\end{cases}$$

ממה? ראינו $\chi(S^n)=1+(-1)^n$

לפי התרגיל אם E מרחב כיסוי מספר k של X

אז $\chi(X)=\frac{1}{k}\chi(E)$

ולכן $\chi(\mathbb{R}P^n)=1-1+1-1+\dots=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)$

fin