פתרון מבחן 6.6.2017

1) עבור אלו ערכי ממשי $c\in\mathbb{R}$: א"ס, אין פתרונות, יחיד?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & c & 0 \\ 6 & c & 2c+1 & 1 \\ 9 & 3 & c^2+2 & c-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c^2+2-3c & c-1 \end{array}\right)$$

נסתכל על המטריצה המדורגת שקיבלנו:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (c-1)(c-2) & c-1 \end{array}\right)$$

עבור $c=2$ יש שורת סתירה: $(0\ \ 0\ \ 0\ |\ 1)$

לכן אין פתרון למערכת.

עבור $c=1$ יש 2 משתנים מובילים x ו-y ו-z חופשי

לכן יש אינסוף פתרונות

עבור $c\neq 1,2$ יש 3 משתנים מובילים לכן פתרון יחיד.

2) נגדיר $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ונמצא לה הופכית:

ואחרי חישוב קיבלנו: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

היות והמערכת הנתונה: $Ax=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

הרי מתקיים $\vec{x}=A^{-1}Ax=A^{-1}b$

לכן:

$$x=\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. הוכח או הפרך

<u>א.</u> אם A ריבועית ובאלכסון שלה יש רק 1 (או (-1)) ← היא הפיכה

<u>הפרכה:</u> $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$ אינן הפיכות

כי הן מחלקי אפס:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&+1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

<u>ב.</u> אם A ריבועית והפיכה אז A^T הפיכה.

הוכחה: אם A הפיכה קיים A^{-1} כך ש

שחלוף שני האגפים: $A\cdot A^{-1}=I$

$$(A\cdot A^{-1})^t=I^t$$

$$\underbrace{(A^{-1})^t}\cdot A^t=I$$

קיבלנו שהאיבר $=(A^t)^{-1}$

שהרי היא ההופכית ל-A^t.

4) א. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$

קבוצת המטריצות האנטי סימטריות $A^t=-A$ היא ת"מ.

<u>הוכחה:</u>

קודם יש לומר כי בכל המטריצות הללו האלכסון $=0$

כי אחרי השחלוף - האלכסון נשאר במקומו:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^t=-\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\Rightarrow a_{ii}=-a_{ii}$$
$$\Rightarrow a_{ii}=0$$

פתר: נוכיח שמתקיים הקריטריון המקוצר לתמ"ו:

א) מטריצת האפס היא אנטי סימטרית: $O_{n\times n}^{t} = -O_{n\times n}$

ב) יהיו שתי מטריצות A, B אנטי סימטריות:

$$B^t = -B \quad , A^t = -A$$

ונוכיח שגם $A+\alpha B$ היא אנטי סימטרית

$$(A+\alpha B)^t = A^t + \alpha B^t = (-A) + \alpha(-B)$$
$$= -(A+\alpha B)$$

ג) $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad W=\{v\in\mathbb{R}^n / Av=\vec{0}\}$

נוכיח תמ"ו! של $\mathbb{R}^n$ מספיק:

1) $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$ כי $A\vec{0}=\vec{0}$.

2) יהיו $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in W$ אזי $A\vec{u}_1=0$ $\ A\vec{u}_2=0$

נראה שגם $u_1+\alpha u_2 \in W$:

$$A(u_1+\alpha u_2) = Au_1 + \alpha Au_2 = \vec{0}+\alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

ד) i. אם $V=\mathbb{R}^4$

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$A\cup B$ בת"ל

אם $V=\mathbb{R}^3$

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$A\cup B$ ת"ל

ה) אינסוף!

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{array}\right)$$

אין פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&2&4\\3&3&3&5\end{array}\right)$$

קס״ד

בוחן 2016 דר אילן

2. סעיף א

מצאו שתי מטריצות ריבועיות A, B מגודל 2×2 המקיימות

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

.

סעיף ב

נתונות 2 מטריצות $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A[1].

(ii) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השניה של AB כסכום משוקלל של שורות B.

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq A^2 + 2AB + B^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) העמודה הראשונה של AB:

$$1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{2(1,1,1)+}$

השורה ~~הראשונה~~ של AB;

השניה כצרוף שורות B:

[1]סכום משוקלל הוא $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n$ כאשר c_i עמודות מטריצה ו α_i סקאלרים

$$0\,(1,1,1) - 1\,(0,1,0) + 1\,(1,0,0)$$