מבני נתונים ואלגוריתמים - הרצאה 22

22 בינואר 2012

בעיות מינימיזציה

בעיית העודף

נניח שיש לנו מטבעות שלמים $k_1, ..., k_L$ וסכום שלם S.
איך ניתן לחלק את S למס' מינימלי של מטבעות?

אלגוריתם חמדני

נניח שהמטבעות הם $20, 10, 5, 1$ והסכום הוא 92.
ניקח את המטבע הכי גדול ונשתמש בו כמה שיותר, נשתמש 4 פעמים ב20, ואז פעם אחת ב10 ואז פעמיים ב1 - 7 מטבעות.
אך אם המטבעות שלנו הם $5, 6, 1$ והסכום הוא 10.
לפי האלגוריתם החמדני, ניקח מטבע אחד של 6 ו4 מטבעות של 1 ונקבל 5 מטבעות, אך אפשר לקחת רק 2 מטבעות של 5.

אלגוריתם יותר טוב

נסמן $C(S)$ מס' מטבעות מינימלי. מתקיים:

$$\begin{aligned} C(0) &= 0 \\ C(k_i) &= 1 \end{aligned}$$

אם ניקח מטבע אחד מסוג k_i אז נשאר לפתור את $C(S-k_i)$, לכן:

$$C(S) = \min_i \{C(S-k_i)\} + 1$$

אז באלגוריתם מתקדמים מ$k=1$ עד לS ומוצאים את $C(k)$, ואז הסיבוכיות $O(S \cdot L)$.

בעיה דומה

נניח שיש לנו סדרה a_i באורך n.
מהו תת הרצף הרציף בעל הסכום המירבי?
יש $O(n^2)$ תתי רצפים ולבדוק סכום של כל רצף עולה $O(n)$ לכן באלגוריתם נאיבי זה היה לוקח $O(n^3)$.
נסמן $M(k)$ - סכום תת הרצף בעל הסכום המקסימלי שמסתיים באינדקס k.
אזי, מתקיים:

$$M(k+1) = \max[M(k)+a_{k+1}, a_{k+1}]$$

ואז $\max_m(M(k))$ הוא סכום תת הרצף המקסימלי.
האלגוריתם הזה לוקח $O(n)$.

עוד בעיה

נניח שיש לנו סדרה a_i באורך n.
מהי תת הסדרה העולה הארוכה ביותר (לא בהכרח רצופה)?
נסמן $M(k)$ אורך הסדרה העולה הארוכה ביותר שנגמרת בk.

כדי לחשב את $M\left(k+1\right)$ צריך למצוא את הסדרה העולה הארוכה ביותר שנגמרת במקום לפני $k+1$ והאיבר האחרון בה קטן מa_{k+1} כלומר:

$$M\left(k+1\right)=\max_{\substack{i\leq k\\ a_{k+1}>a_{i}}}\left(M\left(i\right)\right)+1$$

האלגוריתם הזה עולה $O\left(n^{2}\right)$.

בעיה נוספת

נניח שיש לי תיק בגודל מוגבל K, וחפצים שלכל אחד מהם יש ערך c_i וגודל s_i.
אנחנו צריכים למצוא כמה אנחנו יכולים להכניס בתיק כך שסכום הגדלים לא עולה על גודל התיק וסכום הערכים מקסימלי.
נסמן $M\left(K\right)$ - כמה ערך ניתן להכניס לתיק בגודל K.
אזי:

$$M\left(K\right)=\max_{i}\left(M\left(K-s_{i}\right)+c_{i}\right)$$

בעיה אחרת - השוואת מחרוזות עם טעויות (Editing Distance)

נניח שיש לנו טקסט X וטקסט עם טעויות Y, כאשר הטעויות הן מחיקת טקסט, הוספת טקסט או שגיאות כתיב - החלפת אות באות.
נניח שהאותיות היחידות בטקסטים הן $A,\,C,\,G,\,T$.
למשל -

$$\begin{aligned}X & = ACAAGATACAT\\ Y & = AGAATACAGG\end{aligned}$$

הטעויות בטקסט:

$$\begin{aligned}X & = ACAAGATACAT-\\ Y & = A{\color{red}G}AA{\color{red}--}TACA{\color{red}GG}\end{aligned}$$

מה מס' הפעולות שצריך לעשות כדי לעבור מX לY? זה נקרא Editing Distance.
נגדיר את $M\left(K,\,L\right)$ להיות ה$E.D$ המינימלי על $X\left(1,\,...,\,K\right)$ ו$Y\left(1,\,...,\,L\right)$.
מתקיים:

$$\begin{aligned}M\left(0,\,L\right) & = L\\ M\left(K,\,0\right) & = K\end{aligned}$$

כדי למצוא את $M\left(K+1,\,L+1\right)$ בהינתן $M\left(K,\,i\right)$ לכל $i\leq L$ ו$M\left(i,\,L\right)$ לכל $i\leq K$, צריך לחלק ל3 אפשרויות:
אם הייתה החלפת אות, נקבל

$$M\left(K+1,\,L+1\right)=M\left(K,\,L\right)+\begin{cases}1 & X_{K+1}\neq Y_{L+1}\\ 0 & else\end{cases}$$

אם הייתה מחיקת אות נקבל:

$$M\left(K+1,\,L+1\right)=M\left(K,\,L+1\right)+1$$

אם הייתה הוספת אות נקבל:

$$M\left(K+1,\,L+1\right)=M\left(K+1,\,L\right)+1$$

וכדי למצוא ממש את $M\left(K+1,\,L+1\right)$, נחשב את המינימום בין המקרים.

בעיה נוספת - גשרים

נניח שיש את הערים $n, \ldots, 1$ בצד אחד של נהר וערים $1, \ldots, n$ בצד השני של הנהר, אך בצד השני הערים לא מסודרות לפי הסדר.
רוצים להעביר גשרים בין כל עיר לעיר הזהה לה בצד השני של הגשר, כך שלא ייפגש אף גשר. מה מס' הגשרים המקסימלי שאפשר להעביר?
נסמן $M(K)$ כמס' המקסימלי של גשרים שאפשר להעביר מ1 עד k כך שיש גשר בין הערים k בשני צדי הנהר.
נסמן את העיר במקום הi בצד השני של הגשר כa_i, אזי זה בדיוק כמו מציאת סדרה עולה גדולה ביותר:

$$M(k+1) = \max_{\substack{i \le k \\ a_i < a_{k+1}}} (M(i)) + 1$$

תכנון לינארי

יש לנו בעיה מהצורה:

$$\begin{aligned} & \max\left(\bar{c}^t \bar{x}\right) \\ & \qquad \bar{a}_j^t \bar{x} \le b_j \\ & \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

לדוגמה:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= (2,\, 3,\, 5) \\ \bar{a}_1 &= (1,\, 7,\, -3) \\ \bar{a}_2 &= (2,\, 1,\, 12) \\ b_1 &= 10 \\ b_2 &= 20 \end{aligned}$$

הבעיה היא:

$$\begin{array}{rcl} \max & & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 & \le & 10 \\ 2x_1 + x_2 + 12x_3 & \le & 20 \end{array}$$

לכל אילוץ (אי שוויון) נוסיף משתנה כדי להפוך לשוויון:

$$\begin{array}{rcl} \bar{a}_j^t \bar{x} & \le & b_j \\ & \downarrow & \\ \bar{a}_j^t \bar{x} + w_j & = & b_j \end{array}$$

כאשר נניח

$$x_i,\, w_j \ge 0$$

נגדיר כעת $\tilde{c}$ להיות c ואז אפסים במס' האילוצים.

$$\max\ \bar{c}^t \bar{x} = \max\ \tilde{c}^t \left(\bar{x}\ \bar{w}\right)$$

נסמן $\bar{z} = \left(\bar{x}\ \bar{w}\right)$, אנו מחפשים $\max\ \tilde{c}^t \bar{z}$.
נסמן A כמטריצה של מקדמי האילוצים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אנו מחפשים את $\max\ \tilde{c}^t \bar{z}$ תחת האילוצים $A\bar{z} = \bar{b}$.
נראה איך לפתור בהרצאה הבאה.