שם מגיש: אלדבח לידור תאריך: 3.12.10

שם מרצה: ד"ר בועז צבאן

קורס: אלגברה ליניארית 2.

תרגיל אתגר: פתרון

הגדרות וטענות עזר

סימונים: במהלך ההוכחות וההגדרות הבאות נשתמש בסימונים הבאים:

1. $\mathbb{F}$ - סימון לשדה כלשהו.
2. $*$- סימון לאיבר שדה כלשהו, וקטור כלשהו, בלוק כלשהו או מטריצה כלשהי בהתאם להקשר.
3. $\sim$- סימון ליחס דמיון בין מטריצות.
4. V- סימון למרחב וקטורי כלשהו (ממימד n אלא אם יצוין אחרת).

הערה: במהלך ההוכחות השונות מצוינים נימוקים מבוססי הוכחות קודמות או אחרות:

- נימוקים מבוססי הערות קודמות יצוינו בסוגריים () בציון מיקום ההערה.
- נימוקים מבוססי טענות קודמות יצוינו לצד הטענה עליה הם מבוססים.
- טענות אשר נלקחו מהספר "אלגברה ליניארית 1+2" מהדורה שישית מאת בועז צבאן, ואשר הוכחו במסגרת פתירתו, יצוינו לצד ציון הפרק ממנו נלקחו.

הגדרה: משולשית חלקית עליונה (בקיצור מח"ע) (מסדר k)

תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא מטריצה משולשית חלקית עליונה (מח"ע) מסדר k אם קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{k\times k}$ משולשית עליונה כך ש $A=\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (מטריצת בלוקים). נאמר על A כי היא משולשית חלקית עליונה (מח"ע) (ללא ציון סדר) אם היא משולשית חלקית עליונה (מח"ע) מסדר $l\in\mathbb{N}$ כלשהו המקיים $1\le l\le n$.

הערה: נשים לב לפרטים הבאים:

- אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר n אזי היא מטריצה משולשית עליונה (שכן קיימת $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה כך ש $A=\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$(בלוק של B לבדה)).

  הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר n, אזי על פי הגדרה קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה כך ש $A=\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$(בלוק של B לבדה), כלומר $A=B$, ומכיוון ש B משולשית עליונה אזי A משולשית עליונה.

- אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר k אזי היא מח"ע מסדר s לכל $1\le s\le k$.

הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר k, אזי קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{k\times k}$ משולשית עליונה כך ש $A=\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. עתה יהי $1\le s\le k$ ניקח את המטריצה $B_s\in\mathbb{F}^{s\times s}$ המוגדרת להיות $\forall i,j\in\{1,...,s\}:\left[B_s\right]_{ij}=\left[B\right]_{ij}$. אזי מתקיים $B=\begin{pmatrix} B_s & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ ולכן B_s

משולשית עליונה. מכך נובע $A=\begin{pmatrix} B_s & * & * \\ 0 & * & \\ & 0 & * \end{pmatrix}$, כלומר $A=\begin{pmatrix} B_s & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ וכיוון ש

$B_s \in \mathbb{F}^{s\times s}$ משולשית עליונה אזי על פי הגדרה A מח"ע מסדר s.

הגדרה: שלישה חלקית (מסדר k) (מטריצה)

תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא מטריצה שלישה חלקית מסדר k אם קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר k כך ש $A\sim B$. כלומר קיימת $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=P^{-1}AP$. נאמר על A כי היא שלישה חלקית (ללא ציון סדר) אם קיימת $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע כך ש $A\sim C$.

הגדרה: שליש חלקית (מסדר k) (אופרטור לינארי)

יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. T יקרא שליש חלקית מסדר k אם קיים בסיס B ל V כך שמטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מח"ע מסדר k.

הגדרה: ערך שילוש (ע"ש) (ראשון) (מסדר k)

תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שלישה חלקית מסדר l, כלומר קיימת $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר l כך ש $A\sim B$. $r_1\in\mathbb{F}$ יקרא ערך שילוש (ע"ש) מסדר k של A אם קיימים $1\le i_1,...,i_k\le l$ כך ש $\forall j\in\{1,..,k\}:[B]_{i_j i_j}=r_1$. r_1 יקרא ערך שילוש (ע"ש) ראשון אם $\forall j\in\{1,..,k\}: i_j=j$. הערך k המקסימאלי העונה על התנאים הנ"ל עבור r_1 יקרא הסדר המקסימאלי של r_1.

הערה: נשים לב כי על פי ההגדרה לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע מסדר k, כיוון ש $A\sim A$ ערכי השילוש שלה הם $\forall i\in\{1,..,k\}:[B]_{ii}$ השונים, כאשר הסדר שלהם הוא מספר הפעמים שהם מופיעים ב $\forall i\in\{1,..,k\}:[B]_{ii}$. ומכאן עבור מח"ע $\forall i\in\{1,..,k\}:[B]_{ii}$ הם ערכי השילוש שלה.

טענה 1 (קריטריון בסיסי לשילוש חלקי)

תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $P_A(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$ ($1\le l_1,...,l_k\le n$). אזי A שלישה חלקית מסדר $l_1+...+l_k$, וע"ש שלה הם $\forall i\in\{1,...,k\}:r_i$, כל אחד מסדר ריבויו האלגברי (התהליך אשר יוצג בהוכחה יקרא שילוש חלקי מסדר $l_1+...+l_k$).

<u>הוכחה:</u> תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $P_A(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$. r_1 ע"ע של A לכן קיים $\vec{0}\ne v\in\mathbb{F}^n$ כך ש $Av=r_1v$. נשלים את v לבסיס של $\mathbb{F}^n$: $\{v,u_2,....,u_n\}$ ונבנה מטריצה $\{v,u_2,....,u_n\}=P\in\mathbb{F}^{n\times n}$. P הפיכה שכן כל עמודותיה בת"ל (בסיס). עתה נבדוק למה שווה $D=P^{-1}AP$: (נשתמש בכפל עמודה-עמודה ובעובדה ש $\forall i\in\{1,..,n\}:P^{-1}C_i(P)=e_i$)

$$D=P^{-1}AP=P^{-1}A\begin{pmatrix}v & u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}Av & Au_2 & \cdots & Au_n\end{pmatrix}=$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix}r_1v & Au_2 & \cdots & Au_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{-1}(r_1v) & P^{-1}Au_2 & \cdots & P^{-1}Au_n\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}r_1P^{-1}(v) & P^{-1}Au_2 & \cdots & P^{-1}Au_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1e_1 & * & \cdots & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & *\end{pmatrix}$$

נסמן $D=\begin{pmatrix}r_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$ ($B\in\mathbb{F}^{n-1\times n-1}$). עתה נשים לב כי כיוון ש $A\sim D$:

$(x-r_1)P_B(x)=(x-r_1)\left|Ix-B\right|=\left|Ix-D\right|=P_D(x)=P_A(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$.

ומכאן $P_B(x)=(x-r_1)^{l_1-1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$. עתה באותו אופן נוכל למצוא מטריצה $D_1\sim B_1$ כאשר המעבר ע"י מטריצה $P^0\in\mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ הפיכה, כך ש $D_1=\begin{pmatrix}r_1 & * \\ 0 & B_2\end{pmatrix}$ (אם $l_1-1=0$ אזי $D_1=\begin{pmatrix}r_2 & * \\ 0 & B_2\end{pmatrix}$). ומתקיים: (ניקח $P'=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונשתמש בהפיכות מטריצת בלוקים שהוכחה בפרק ג': אלגברת המטריצות, על פיה $\begin{pmatrix}A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$):

$$D^1=(P')^{-1}D(P')=(P')^{-1}\begin{pmatrix}r_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}(P')=$$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r_1 \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}* \\ B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}\right)=$$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & (p^0)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1 \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & (p^0)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* \\ B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & p^0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}r_1 & * \\ 0 & D_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1 & * & * \\ 0 & r_1 & * \\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}$$

נוכל להמשיך בתהליך עבור B_2 וכך הלאה, התהליך ייעצר לאחר $l_1+\ldots+l_k$ כאשר נגיע למטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{l_1}} & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{l_k}} & \\
r_1 & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & r_1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & r_1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & r_1 & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Q
\end{pmatrix}$$

הדומה לA, כאשר $P_Q(x)=q(x)$. זוהי מטריצה מח"ע מסדר $l_1+\ldots+l_k$ הדומה לA ולכן על פי הגדרה A שלישה חלקית מסדר $l_1+\ldots+l_k$. כמו כן על פי הגדרה לכל $i\in\{1,\ldots,k\}:\ r_i$ ע"ש של A מסדר l_i.

מ.ש.ל.

<u>טענה 2</u>

יהיו מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שלישה חלקית, $r_1\in\mathbb{F}$. r_1 ע"ש מסדר מקסימאלי k של A $\Leftrightarrow$ r_1 ע"ע של A בעל ריבוי אלגברי k.

<u>הוכחה:</u> יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שלישה חלקית, $r_1\in\mathbb{F}$.

$\Leftarrow$. נניח r_1 ע"ש מסדר מקסימאלי k של A . A שלישה חלקית לכן קיימת $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מח"ע כך ש $A\sim B$. r_1 ע"ש של A לכן ניתן להציג:

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i_1 & & & i_k & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} Q_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Q_{t_1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & Q_{t_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Q_{t_3} \end{pmatrix} \end{array}$$

כאשר Q_i מטריצות ריבועיות (נוכל להציג באופן זה עד סדר השלישות החלקית של B , שכן עד אותו מקום היא משולשית עליונה, לאחריו נוכל פשוט לקחת את כל הבלוק הנותר על האלכסון כמטריצה ריבועית אחת)) עתה נמצא פולינום אופייני: (ע"פ הכללה לדטרמיננטה של מטריצת בלוקים של מטריצות ריבועיות אותה הוכחנו בפרק ו':דטרמיננטה):

$$P_B(x)=|Ix-B|=\begin{vmatrix} Ix-Q_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Ix-Q_{t_1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x-r_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & Ix-Q_{t_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-r_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Ix-Q_{t_3} \end{vmatrix}=$$

$$|Ix-Q_1|\cdot\ldots\cdot|Ix-Q_{t_1}|\cdot(x-r_1)\cdot\ldots\cdot|Ix-Q_{t_2}|\cdot(x-r_1)\cdot\ldots\cdot|Ix-Q_{t_3}|=$$

נסמן $q_i(x)=|Ix-Q_i|$. עתה כיוון ש r_1 מ מופיע באלכסון k פעמים אזי $(x-r_1)$ מופיע בפולינום המתקבל k פעמים, אין מופעים נוספים שכן במידה והיו אזי k לא היה הסדר המקסימאלי של r_1 בתור ע"ש של A. עתה: $P_B(x)=(x-r_1)^k q_1(x)\cdot\ldots\cdot q_{t_1}(x)\cdot\cdot\ldots\cdot q_{t_2}(x)\cdot\ldots\cdot q_{t_3}(x)$. עתה כיוון ש $A\sim B$ ולמטריצות דומות אותו פולינום אופייני:

$$P_A(x)=(x-r_1)^k q_1(x)\cdot\ldots\cdot q_{t_1}(x)\cdot\cdot\ldots\cdot q_{t_2}(x)\cdot\ldots\cdot q_{t_3}(x)$$

לכן r_1 ע"ע של A בעל ריבוי אלגברי k.

$\Rightarrow$. נניח r_1 ע"ע של A בעל ריבוי אלגברי k. אזי $P_A(x)=(x-r_1)^k q(x)$ (כאשר $q(x)\in\mathbb{F}_{n-k}[x]$ וכן $q(r_1)\neq 0$ שכן אחרת ניתן היה לכתוב $q(x)=(x-r_1)m(x)$, ומכאן $P_A(x)=(x-r_1)^{k+1}m(x)$ בסתירה להיות הריבוי האלגברי של r_1). מכך נובע על פי טענה 1 כי r_1 ע"ש של A מסדר k. k הסדר המקסימאלי שכן אחרת ע"פ החלק הקודם ניתן להציג $P_A(x)=(x-r_1)^{k+1}q(x)$, כפי שהראינו זאת בסתירה לכך שk הריבוי האלגברי של r_1.

מ.ש.ל.

הערה: מהאופן בו בנינו את המח"ע הדומה לA בתהליך השילוש החלקי נובע כי כל ע"ש של A הינו ע"ש ראשון. שכן ע"פ טענה 2 כל ע"ש r_1 מסדר מקסימאלי הינו ע"ע של A מריבוי אלגברי k, נוכל לכתוב $P_A(x)=(x-r_1)^{l_1}q(x)$, לבצע שילוש חלקי מסדר k ולקבל מח"ע B מסדר k הדומה לA ועבורה $\left[B\right]_{ii}=r_1$ $\forall i\in\{1,..,k\}:$. מכך נובע על פי הגדרה כי r_1 ע"ש ראשון.

כמו כן במהלך ההוכחה הראינו כי במקרה זה ובסימונים הנ"ל $q(r_1)\neq 0$.

<u>טענה 3</u>

יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי, כך ש $P_T(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$ ($1\le l_1,\ldots,l_k\le n$).
אזי T שליש חלקית מסדר $l_1+\ldots+l_k$, וע"ש של $\left[T\right]_B$ מטריצת הייצוג המח"ע של T הם $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:r_i$, כל אחד מסדר ריבויו האלגברי.

<u>הוכחה:</u> יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי, כך ש $P_T(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$ ($1\le l_1,\ldots,l_k\le n$). עתה תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצת ייצוג של T, אזי על פי הגדרת הפולינום האופייני של אופרטור ליניארי מתקיים $P_A(x)=P_T(x)=(x-r_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^{l_k}q(x)$. עתה על פי טענה 1 קיימת $C\sim A$ מח"ע מסדר $l_1+\ldots+l_k$, ש $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:r_i$ הם ערכי השילוש שלה, כל אחד מסדר ריבויו האלגברי (ערך שילוש:הערה). A מטריצת ייצוג של T וכן $C\sim A$ לכן C מטריצת ייצוג של T, כלומר קיים בסיס B של V כך ש $\left[T\right]_B=C$. כלומר $\left[T\right]_B$ מח"ע מסדר $l_1+\ldots+l_k$ ומכאן T שליש חלקית מסדר $l_1+\ldots+l_k$, וכן ע"ש של $\left[T\right]_B$ הם $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:r_i$, כל אחד מסדר ריבויו האלגברי.

מ.ש.ל.

<u>טענת עזר 1</u>

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה המקיימת $0 = [A]_{ii} : \forall i\in\{1,..,n\}$. אזי A נילפוטנטית לכל היותר מסדר n, כלומר $A^n=0$.

<u>הוכחה:</u> תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה המקיימת $0 = [A]_{ii} : \forall i\in\{1,..,n\}$, עלינו להראות כי $A^n=0$. $A=\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$, נביט ב $[A^2]_{ij}$:

$$[A^2]_{ij}=R_i(A)C_j(A)=$$

נבחין כי: $C_i(A)=\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0\}\,i \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$, $\forall i\in\{1,...,n\}: R_i(A)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \overset{i}{0} & * & \cdots & *\end{pmatrix}$. לכן לכל $j\le i+1$:

$$[A^2]_{ij}=R_i(A)C_j(A)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \overset{i}{0} & * & \cdots & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0\}\,j \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=$$

$$0\cdot *+...+\overset{j-1}{0\cdot *}+..+0\cdot 0+...+\overset{i}{0\cdot *}+...+0\cdot *=0$$

כלומר $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$.

עתה נביט ב $[A^3]_{ij}$:

$$[A^3]_{ij}=R_i(A^2)C_j(A)=$$

נבחין כי: $\forall i \in \{1,...,n\}: R_i(A^2) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overset{i+1}{0} & * & \cdots & * \end{pmatrix}, C_i(A) = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0\}i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. לכן לכל

$j \le i+2$:

$$\left[A^3\right]_{ij} = R_i(A^2)C_j(A) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overset{i+1}{0} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0\}j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$0\cdot * + \ldots + \overset{j-1}{0\cdot *} + 0\cdot 0 + \ldots + \overset{i+1}{0\cdot *} + \ldots + 0\cdot * = 0$$

כלומר $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. נמשיך באותו אופן ונקבל כי $\forall j \le i+3: \left[A^4\right]_{ij} = 0$, $\forall j \le i+4: \left[A^5\right]_{ij} = 0$ עד אשר נגיע ל $\forall j \le i+n-1: \left[A^n\right]_{ij} = 0$. אך $1 \le i, j \le n$ ולכן תמיד $j-i \le n-1$ כלומר $\forall 1 \le i, j \le n: j \le i+n-1$, ומכך נסיק כי $\forall 1 \le i, j \le n: \left[A^n\right]_{ij} = 0$, כלומר $A^n = 0$.

מ.ש.ל.

תרגיל אתגר: פתרון

יהיו $T:V\to V$ אופרטור לינארי, $n=\dim V$, λ ערך עצמי של T. הוכח: הריבוי האלגברי של λ (כערך עצמי של T) שווה למימד של $\ker(T-\lambda I)^n$.

<u>הוכחה:</u> יהיו $T:V\to V$ אופרטור לינארי, $n=\dim V$, λ ערך עצמי של T, ויהי k הריבוי האלגברי של λ (כערך עצמי של T). כיוון ש λ ע"ע של T מריבוי אלגברי k אזי $P_T(x)=(x-\lambda)^k q(x)$. מכך נובע על פי טענה 3 כי T שליש חלקית מסדר k, כלומר קיים בסיס B של V כך ש $\left[T\right]_B$ מח"ע מסדר k, וע"ש של $\left[T\right]_B$ הוא λ מסדר k. עתה נציין כי $P_{[T]_B}(x)=P_T(x)=(x-\lambda)^k q(x)$, וכן הריבוי האלגברי של λ בתור ע"ע של $\left[T\right]_B$ הוא k, ולכן על פי טענה 2 (הערה) $q(\lambda)\neq 0$.

λ ע"ש של $\left[T\right]_B$ מסדר k, וכן $\left[T\right]_B$ מח"ע. מכך נובע על פי הגדרה: ערך שילוש (הערה) כי ניתן לכתוב: $\left[T\right]_B=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda \quad * \quad \cdots}^{k} & * \\ 0 \quad \ddots \quad \ddots & \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \lambda & * \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & Q \end{pmatrix}$ כאשר $Q\in\mathbb{F}^{(n-k)\times(n-k)}$. עתה על פי דטרמיננטת מטריצת בלוקים (הוכח בפרק ו':דטרמיננטה) וכן על פי הגדרת הפולינום האופייני:

$$(x-\lambda)^k q(x)=P_{\left[T\right]_B}(x)=\begin{vmatrix} x-\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x-\lambda & * \\ 0 & \cdots & 0 & Ix-Q \end{vmatrix}=(x-\lambda)^k\left|Ix-Q\right|$$

לכן $q(x)=\left|xI-Q\right|$. הראינו כי $q(\lambda)\neq 0$ לכן $\left|\lambda I-Q\right|=q(\lambda)\neq 0$, ומכך נובע $\lambda I-Q$ הפיכה.

$\left[T\right]_B$ מטריצת ייצוג של T. כלומר עבור $v\in V$: מתקיים $\left[T(v)\right]_B=\left[T\right]_B\left[v\right]_B$, לכן

$$\left[(T-\lambda I)(v)\right]_B=\left[T(v)-\lambda I(v)\right]_B=\left[T(v)\right]_B-\left[\lambda I(v)\right]_B=\left[T\right]_B\left[v\right]_B-\lambda\left[v\right]_B=(\left[T\right]_B-\lambda I)\left[v\right]_B$$

כלומר $\left[T\right]_B-\lambda I$ מטריצת ייצוג ל $T-\lambda I$. עתה עלינו למצוא $\ker(T-\lambda I)^n$, כלומר פתרונות למערכת $(T-\lambda I)^n v=0 : v\in V$. כפי שהראינו $\left[(T-\lambda I)(v)\right]_B=(\left[T\right]_B-\lambda I)\left[v\right]_B$ לכן עלינו לפתור את המערכת $(\left[T\right]_B-\lambda I)^n\left[v\right]_B=\left[0\right]_B=0 : v\in V$. נפתור המערכת:

$$(\left[T\right]_B-\lambda I)^n\left[v\right]_B=0$$

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & * \\ 0 & \cdots & 0 & Q \end{pmatrix}-\lambda I\right)^n\left[v\right]_B=0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & Q-\lambda I \end{pmatrix}^n [v]_B = 0$$

נפתור המערכת ההומוגנית , נבצע את פעולת החזקה על פי חזקת מטריצת בלוקים, אשר הוכחנו כי מקיימת $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & C \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & * \\ 0 & C^n \end{pmatrix}$ $:\forall A \in \mathbb{F}^{k\times k}, C \in \mathbb{F}^{m\times m}, n \in \mathbb{N}:$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & Q-\lambda I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & (Q-\lambda I)^n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה המקיימת $\forall i \in \{1,..,n\}: [A]_{ii} = 0$, לכן על פי טענת עזר 1 מתקיים $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^n = 0$ (מטריצת האפס). נותר לפתור המערכת: $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (Q-\lambda I)^n \end{pmatrix}$.

הראינו כי $\lambda I - Q$ הפיכה לכן גם $-(\lambda I - Q) = Q - \lambda I$ הפיכה, ומכאן (טענה מפרק ג':אלגברת המטריצות) המטריצה $(Q-\lambda I)^n$ הפיכה. לכן ע"י פעולות שורה נוכל להביא את $(Q-\lambda I)^n$ לצורת מטריצת היחידה (מגודל $(n-k)\times(n-k)$). העמודות $1 \le j \le k$ בשורות המתאימות ל $(Q-\lambda I)^n$ מכילות אפסים בלבד ולכן פעולות השורה לא תשפענה על הערכים הללו, עתה נוכל את איברי * בשורות $1 \le i \le k$ לאפס באמצעות פעולות שורה, וזאת באמצעות $I_{(n-k)\times(n-k)}$ שקיבלנו בתחום $k+1 \le i, j \le n$, בסה"כ ביצענו:

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (Q-\lambda I)^n \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

מביצוע הכפל נקבל כי $\forall i \in \{k+1,..,n\}: x_i = 0$. לכן וקטור הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. מכאן בסיס למרחב הפתרונות הוא $\{e_1,...,e_k\}$ (בהצגה לפי בסיס B), מכאן שמימד מרחב הפתרונות הוא k, כלומר $\dim(\ker(T-\lambda I)^n) = k$. בכך הוכחנו כי הריבוי האלגברי של λ (כערך עצמי של T) שווה למימד של $\ker(T-\lambda I)^n$. מ.ש.ל.