

מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119  
מועד ב' סמסטר א' תשע"ז

מרצה: איתמר שטיין.

מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.

תאריך: כ"ה ניסן תשע"ז 21/4/17.

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4 שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה. כל שאלה שווה 25 נקודות.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.

**יש לנמק היטב את תשובותיכם!**

1. נתונה מערכת משוואות לינאריות התלויה בפרמטרים  $a, b$ :

$$x + y + z = a$$

$$x - y = 0$$

$$3x + y + bz = 0$$

עבור אילו ערכי  $a, b$  יש למערכת פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון? במקרה של אינסוף פתרונות, מצאו גם את הפתרון הכללי.

2. נתונות שתי מטריצות. קבעו לגבי כל מטריצה האם היא הפיכה. אם כן, חשבו גם את המטריצה ההופכית:

$$(א) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(ב) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. נתונה קבוצה של וקטורים ב  $\mathbb{R}^3$ :

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) האם

$$? \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

אם כן, בטאו את  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  כצירוף לינארי של הוקטורים ב  $X$ .

(ב) האם

$$? \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

אם כן, בטאו את  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  כצירוף לינארי של הוקטורים ב  $X$ .

(ג) האם הקבוצה  $X$  בת"ל? ענו על סעיף זה על סמך התשובות של הסעיפים הקודמים, ובלי חישוב נוסף.

4. (א) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) תהי מטריצה  $B$  שדומה (בדמיון מטריצות) למטריצה  $A$ . מה הדטרמיננטה של המטריצה  $AB^t$ ?

5. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את הערכים העצמיים של  $A$ .

(ב) מצאו בסיסים למרחבים העצמיים.

(ג) האם  $A$  לכסינה? נמקו.