אלגברה מופשטת 1
מתרגלת: לואי פולב
מרצה: פרופסור עוזי וישנה

אלגברה מופשטת – תרגיל 2

שאלה 1

א. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי: $(5614,1260)$.
ב. מצאו $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש- $1525\alpha+927\beta=1$.

שאלה 2

א) תהי G חבורה סופית, $a,b\in G$. הוכיחו: $ord(ab)=ord(ba)$

(רמז: אם $ord(ab)=n, ord(ba)=m$, הסתכלו על $(ba)^{n+1}$ ועל $(ab)^{m+1}$).

ב) תהי G חבורה, $g\in G$, $ord(g)=n$. הוכיחו ש- $g^a=g^b$ אמ"מ $a\equiv b\pmod n$.

שאלה 3

א. נגדיר $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב- G.
ב. תהי G חבורה. אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^3=a^3b^3$ האם G אבלית?

שאלה 4

אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{15}$;
ב. $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2$;
ג. U_{20};
ד. $U_8\times U_9$.

שאלה 5

א. תהיינה H,G_1,G_2 תת-חבורות של G. הוכיחו: אם $H\subseteq G_1\cup G_2$ אזי $H\subseteq G_1$ או $H\subseteq G_2$.

ב. מצאו דוגמה לחבורה G ולתת חבורות $H,G_1,G_2,G_3\le G$ כך ש- $H\subseteq G_1\cup G_2\cup G_3$ אבל H __אינה__ מוכלת בשום איחוד מהצורה $G_i\cup G_j$.

שאלה 6

א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32}.

ב. מצאו בתוך $(\mathbb{Q},+)$ שרשרת אינסופית (עולה) של תת חבורות ציקליות.

__רמז__: הראשונה נוצרת על ידי 1.

שאלה 7

תהי G חבורה. נסמן $m_2(G)=\left|\left\{x\in G : x^2=1\right\}\right|$, כלומר $m_2(G)$ הוא מספר הפתרונות של המשוואה $x^2=1$ בחבורה G.

א. הראו שבכל חבורה סופית G מתקיים $m_2(G)\equiv|G|\ (\mathrm{mod}\ 2)$;
[שימו לב שהחבורה לא בהכרח אבלית!]

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר **זוגי** של איברים קיים איבר מסדר 2.
__רמז לסעיף א'__: הגדירו על G את יחס השקילות הבא:
$x\equiv y \Leftrightarrow (x=y \vee xy=1)$, ושימו לב שהאיברים שריבועם אינו 1 שייכים למחלקות שקילות בגודל 2.
__הערה__: הרמז מציע דרך פתרון אלגנטית. כדאי שלפני זה תנסו להגיע לאיזשהו פתרון אינטואיטיבי על סמך הרעיונות שכבר ראינו בכיתה.

בהצלחה!