

תרגיל בית 4 אינפי 3

1. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם.

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

פתרון.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0 \end{aligned}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

פתרון. נתקדם על הישר $x = y = z$ ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x}$$

גבול זה לא קיים ולכן גם לפונקציה המקורית אין גבול.

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

פתרון. נציב $t = x^2 + y^2 + 1$ ונקבל

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{(\sqrt{t} - 1)(\sqrt{t} + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{t} + 1} = \frac{1}{2}$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{2}$.

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

פתרון.

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = |y| \rightarrow 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} = 0$$

2. האם קיים $a \in \mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & xy \neq 0 \\ a & \text{תרחא} \end{cases}$$

פתרון. לא. אם נתקדם על הישר $x = y$ נקבל ש $f(x, y) = 0$ לאורך ישר זה. אבל

אם נתקדם על הישר $y = 2x$ נקבל ש

$$f(x, y) = \frac{x}{2x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

לכן אין שום a שנוכל לבחור כך שהפונקציה תהיה רציפה.

3. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$?

(א)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

פתרון. לא. נתקדם לאורך הישר $y = \sqrt{x}$ ונקבל

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן f לא רציפה.

(ב)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

פתרון. כן. מפני ש

$$|(x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2)| \leq (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \ln(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2)$$

נציב $t = x^2 + y^2$ ואז

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t = 0$$

ולכן גם הגבול המקורי הוא 0 והפונקציה רציפה.

4. (א) תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. תהי x_0 נקודת הצטברות של D .

נניח כי

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

כאשר x_0 נקודת הצטברות של כל D_i . אז מתקיים ש

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אם ורק אם לכל i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_i}(x) = L$$

(רמז: השתמשו בהגדרת גבול לפי היינה)

פתרון. צד אחד של הטענה הוא מיידי. ברור שאם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אז זה אותו גבול לכל פונקציה מצומצמת. עבור הכיוון השני נוכיח עבור מצב של איחוד בין שתי קבוצות בלבד

$$D = D_1 \cup D_2$$

כי את המקרה הכללי אפשר להוכיח אחר כך באינדוקציה. ניקח סדרה כלשהיא

$$(f(a_n) \rightarrow L \text{ להוכיח } a_n \rightarrow x_0 \text{ (צריך להוכיח } L))$$

עכשיו, אם כל איברי a_n חוץ ממספר סופי נמצאים ב D_1 אז לפי הנתון ש

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x) = L$$

נקבל ש

$$f(a_n) \rightarrow L$$

כנדרש. אם כמעט כל איברי a_n נמצאים ב D_2 ההוכחה דומה. אם יש אינסוף איברים בכל אחד מהם אז אפשר לפצל את a_n לשתי תתי סדרות: b_n שיש בה את האיברים מ a_n כך ש $a_n \in D_1$ ו c_n שיש בה את האיברים מ a_n שנמצאים ב D_2 . לפי הנתון

$$f(b_n) \rightarrow L$$

$$f(c_n) \rightarrow L$$

אבל בגלל ש $f(a_n), f(b_n)$ הן שתי תתי סדרות של $f(a_n)$ שביחד הם כל $f(a_n)$ אז נקבל ש

$$f(a_n) \rightarrow L$$

כנדרש.

(ב) הראו כי הטענה לא נכונה אם מחליפים את האיחוד הסופי באיחוד אינסופי.

פתרון. אפשר לקחת את הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}$$

שתחום ההגדרה שלה הוא $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\}$ נפצל

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} D_k$$

כאשר D_k הוא הקו הישר $y = kx$ אז

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{D_k}(x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{k^2 x^2}{x} = 0$$

אבל הגבול לא קיים. אפשר לראות זאת אם מתקדמים על המסלול $y = \sqrt{x}$ ואז מקבלים

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x} = 1$$

שזה גבול שונה.

5. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם. מצאו גם את הגבולות החוזרים בכל מקרה (אם הם קיימים).

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$$

ולכן

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = -1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן ברור שלפונקציה המקורית אין גבול.

(ב)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right)$$

אם $y \neq 0$ גבול זה לא קיים. לכן הגבול החוזר לא קיים. בדומה קל להראות

שגם הגבול החוזר השני לא קיים. אבל הגבול דווקא קיים כי

$$|(x+y) \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right)| \leq x+y \rightarrow 0$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

ולכן

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן הגבול לא קיים.

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin y}{x + y} = \frac{\sin y}{y}$$

ולכן

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + \sin y}{x + y} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

נראה שהגבול ב $(0,0)$ לא קיים. נתקדם ל $(0,0)$ על $x = -\sin y$ ונקבל
שלאורך מסלול זה $f(x, y) = 0$. ולכן

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(-\sin y, y) = 0$$

שזה שונה מהגבולות החוזרים ולכן הגבול לא קיים.