מבנים אלגברים.

<u>תרגיל מספר 5</u>

<u>שאלה 1:</u>

מצאו את כל המחלקות הימניות של תת-חבורה H בחבורה G במקרים הבאים, אם G אינה אבלית, פרטו גם את המחלקות השמאליות.

א. $\mathrm{H} = \langle 5 \rangle$, $\mathrm{G} = (\mathbb{Z}_{20}\, , +)$.

ב. $\mathrm{H} = 8\mathbb{Z}$, $\mathrm{G} = (2\mathbb{Z}\, , +)$.

ג. $\mathrm{H} = \langle 10 \rangle$, $\mathrm{G} = (U_{11},\ \cdot)$.

ד. $\mathrm{H} = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* : x > 0\}$, $\mathrm{G} = (\mathbb{R}^*,\ \cdot)$.

ה. $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathrm{G} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}\, , +)$.

<u>שאלה 2:</u>

פונקציית אויילר $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $\varphi(n) = |U_n|$ באשר U_n חבורת האיברים ההפיכים ב- $\mathbb{Z}_n^*$.

א. תהי G חבורה ציקלית מסדר d. הראו כי ל-G יש $\varphi(d)$ יוצרים שונים.

ב. ידוע ש $\mathbb{Z}_\mathrm{n}$ חבורה ציקלית מסדר n שלה יש בידיוק תת- חבורה אחת מסדר d , לכל d טבעי כך ש $d|n$ (ראינו בתרגיל שזה למעשה נכון לכל חבורה ציקלית מסדר n סופי). הוכיחו כי ל $\mathbb{Z}_\mathrm{n}$ יש בדיוק $\varphi(d)$ איברים מסדר d .

ג. הוכיחו בעזרת הסעיפים הקודמים שמתקיים $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

<u>שאלה 3:</u>

תהי G חבורה מסדר p^2 , p ראשוני. הוכיחו ש G היא חבורה ציקלית או שכל איבר ב- G פרט לאיבר היחידה הוא מסדר p .

<u>שאלה 4:</u>

תהי G חבורה מסדר $2p$, p ראשוני אי זוגי. השתמשו במשפט לגרנז' על מנת להוכיח שב- G יש איבר מסדר p .

רמז: בתרגיל הראינו שכל חבורה שסדר כל אבריה 2 היא אבלית. השתמשו בכך בפיתרונכם.

<u>שאלה 5:</u>

לכל $m \in \mathbb{Z}$ נגדיר העתקה $\varphi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (כאשר $\mathbb{Z}$ היא החבורה החיבורית) ע"י $\varphi_\mathrm{m}(\mathrm{x}) = \mathrm{mx}$ (כאן כפל ב-m הוא למעשה חזקה בחבורה החיבורית).

א. הראו כי φ_m היא הומומורפיזם של חבורות.

ב. הוכיחו כי $\{\varphi_m : m \in \mathbb{Z}\}$ הם כל ההומומרפיזמים של החבורות מ- $\mathbb{Z}$ לעצמה.

שאלה 6:

יהי $\varphi: G_1 \to G_2$ הומומורפיזם של חבורות.

א. הוכיחו כי לכל $g_1 \in G_1$, הסדר של $\varphi(g_1)$ מחלק את הסדר של g_1.
ב. בהסתמך על הסעיף הקודם הוכיחו כי אם φ איזומורפיזם אזי $\varphi(g_1)$ ו- g_1 הם מאותו הסדר.
ג. השתמשו בסעיף (ב) עמ"נ לקבוע האם $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ו- Z_8 איזומורפיות. נמקו תשובתכם.
ד. אם φ אפימורפיזם אז אם ב G_2 יש איבר מסדר n אז גם ב - G_1 יש איבר מסדר n .
ה. הוכיחו שאפימורפיזם בין חבורות ציקליות מעביר יוצר ליוצר.

שאלה 7:

הוכיחו שההעתקות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הם חח"ע ו/או על:

א. $f: (\mathbb{C}^*,\cdot) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^5$.
ב. $f: (\mathbb{Q}^*,\cdot) \to (\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^5$.