תרגיל כיתה 5 –אנליזה מודרנית

למת פאטו

תזכורת: ראינו בהרצאה את למת פאטו האומרת שאם $f_n : X \to [0,\infty]$, פונקציות מדידות אזי מתקיים $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

דוגמא לאי שוויון חזק:

נתבונן בממ"ח $(\mathbb{R},L,m)$, ונגדיר סדרת פונקציות פשוטות ע"י $f_n(x)=\frac{1}{n}$. קל לראות:

1. $\underline{\lim} f_n = 0$
2. לכל n $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$

ולכן האי-שוויון בלמת פאטו הוא חזק: $0<\infty$.

1. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:

i. $1_{(n,n+1)}(x)$

ii. $1_{(n,\infty)}(x)$

$n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)$

iii. $\left(1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n(2\pi x)\right)\right)\right)1_{(-\infty,\infty)}$

פתרון:

i. $\underline{\lim}\int 1_{(n,n+1)}(x)=m((\mathrm{n},\mathrm{n}+1))=1\ge\int \underline{\lim} 1_{(n,n+1)}(x)=\int 0=0$

ii. $\underline{\lim}\int 1_{(n,\infty)}(x)=m((\mathrm{n},\infty))=\infty\ge\int \underline{\lim} 1_{(n,\infty)}(x)=\int 0=0$

iii. $\underline{\lim}\int n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)=nm\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)=1\ge\int \underline{\lim} n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)=\int 0=0$

iv.

$$\int\left[1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n(2\pi x)\right)\right)\right]1_{(-\infty,\infty)}=\int 0\cdot 1_{\{x:\sin(2^n(2\pi x))<0\}}+2\cdot 1_{\{x:\sin(2^n(2\pi x))>0\}}+1\cdot 1_{\{x:\sin(2^n(2\pi x))=0\}}$$

$$=\int 2\cdot 1_{\{x:\sin(2^n(2\pi x))>0\}}+1_{\{x:\sin(2^n(2\pi x))=0\}}\ge 2m\left(\{x:\sin\left(2^n(2\pi x)\right)>0\}\right)=2\cdot\infty=\infty$$

מצד שני,

מכיוון שלכל x $\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)$ יהיה שלילי עבור איזשהו n אמ"מ

$2\pi k+\pi<2^n\left(2\pi\right)x<2\pi+2\pi k$ עבור איזשהו n ו $k\in\mathbb{Z}$ נקבל כי זה שקול ל

$\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{k+1}{2^n}$. ה x-ים היחידים שעבורם אי השוויון לא מתקיים עבור n

מספיק גדול ושום k אלו הכפולות של חזקות של $\frac{1}{2}$ שעבורם נקבל ש

$\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)=0$ מ n מסויים (אחרת נקרב ע"י מספר בייצוג בינארי). מכאן ש

$$\underline{\lim}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)\right)\right]=\begin{cases}1 & x=\frac{m}{2^M},M\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

מכיוון שמספר ה x-ים עבורם נקבל 1 הינו בן מנייה, המידה של קבוצה זו היא 0 ולכן בסך הכל קיבלנו

$$\int\underline{\lim}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)\right)\right]=0<\infty$$

2. תרגיל (למת פאטו ההפוכה) : הוכיחו כי אם $f_n:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות המוגדרות על הממ"ח $\left(X,S,\mu\right)$. אם קיימת פונקציה אינטגרבילית g $\left|f_n\right|\le g$ לכל n, אזי

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\le\int_X\limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

פתרון: נסתכל על סדרת הפונקציות $h_n=g-f_n$, זוהי כמובן סדרה חיובית. בנוסף, האינטגרל $\int_X h_n d\mu=\int_X\left(g-f_n\right)d\mu=\int_X gd\mu-\int_X f_n d\mu$, ולכן מוגדר היטב. כעת, עפ"י למת פאטו נקבל

$$\int_X\liminf_{n\to\infty}\left(g-f_n\right)d\mu=\int_X\left(\liminf_{n\to\infty} g+\liminf_{n\to\infty}\left(-f_n\right)\right)d\mu$$
$$=\int_X\liminf_{n\to\infty} gd\mu+\int_X\liminf_{n\to\infty}\left(-f_n\right)d\mu=\int_X gd\mu-\int_X\limsup_{n\to\infty} f_n d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X\left(g-f_n\right)d\mu$$
$$=\liminf_{n\to\infty}\int_X gd\mu+\liminf_{n\to\infty}\int_X -f_n d\mu=\int_X gd\mu-\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$
$$\Rightarrow\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\le\int_X\limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

3. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n\downarrow f$, הראו כי $\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int_X\liminf_{n\to\infty} f_n d\mu=\int_X f_n d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\int\limits_X fd\mu = \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$, ומכאן ש

$$\int\limits_X fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$$

4. **<u>תזכורת- משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:</u>**

אם $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le +\infty$ כולן מדידות לבג, אזי פונקצית הגבול שלהן קיימת ומדידה ומתקיים $\int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f \ge 0$ פונקציה מדידה ואי-שלילית המקיימת $\int\limits_X fd\mu = 0$, הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית-ממש היא בעלת מידה 0.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $E := \left\{x \in X : f(x) > 0\right\}$, ו-$f_n(x) = n\cdot f(x)$. קל לראות שהסדרה $\{f_n\}$ עומדת בתנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן $\int\limits_X fd\mu = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} n = \int\limits_X nfd\mu \lim_{n\to\infty} = \int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} n\cdot f\right) d\mu$.

נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$, $X \supseteq E$ ולכן $\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} n\cdot f\right) d\mu \ge \int\limits_E \left(\lim_{n\to\infty} n\cdot f\right) d\mu = 0$. אבל לכל $x \in E$ מתקיים $f(x) > 0$ ולכן $\left(f_n\big|_E\right)(x) = n\cdot f(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. בסה"כ קיבלנו:

$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} n\cdot f\right) d\mu \ge \int\limits_E (\infty) d\mu = \infty\mu(E) = \infty$. זו סתירה ולכן מש"ל.

<u>תרגיל:</u> חשבו את הגבול $I := \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) dm(x)$. הצדיקו את תשובתכם.

<u>פתרון:</u> ניתן לרשום את הגבול בצורה הבאה:

$I = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{(0,\infty)} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x)\, dm(x)$. ברוח זו נגדיר את הפונקציות המדידות לבג (כי הן רציפות) $f_n(x) := \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \ge 0$ נטען כעת כי $\{f_n\}$ היא סדרה עולה.

<u>הוכחה:</u>

יש להראות כי לכל $0 < x < \infty$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \le \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right) I_{(0,n+1)}(x)$$

נחלק למספר מקרים:

1. אם $x \geq n+1$ שני האינדיקטורים מתאפסים ומתקיים אי השוויון.
2. אם $n \leq x < n+1$ זה נכון כי f_{n+1} אי שלילית.
3. אם $0 < x < n$ צ"ל $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

נראה זאת בשני שלבים:

א. $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

ב. $\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

<u>הוכחת השלבים:</u>

א. אנחנו רוצים להראות כי עבור $0 \leq x < n$ מתקיים

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1-\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n}}\right)^n \left(1-\frac{x}{n+1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1-x}{n+1}}{\frac{n-x}{n}}\right)^n \left(1-\frac{x}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n+1-x)}{(n-x)(n+1)}\right)^n \left(1-\frac{x}{n+1}\right) = \left(1+\frac{x}{(n-x)(n+1)}\right)^n \left(1-\frac{x}{n+1}\right)$$

$$> \left(1+\frac{nx}{(n-x)(n+1)}\right)\left(1-\frac{x}{n+1}\right) = 1-\frac{x}{n+1}+\frac{nx}{(n-x)(n+1)}-\frac{nx^2}{(n-x)(n+1)^2} \geq 1$$

שזה שקול ל

$$nx(n+1)-x(n-x)(n+1)-nx^2 \geq 0$$

$$nx(n+1)-x(n-x)(n+1)-nx^2 = x^2 \geq 0$$

ב. פונקצית הקוסינוס יורדת בקטע $(0,1)$ ולכן עבור n גדול מספיק נקבל $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$
נוסיף 2 לשני האגפים ונפעיל לוג (שהיא פונקציה עולה) לקבל את הדרוש.

ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג

$$I = \int_{(0,\infty)} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x)\right] dm(x) =$$

$$= \int_{(0,\infty)} \left[e^{-x} \log(2+1) I_{(0,\infty)}(x)\right] dm(x) = \log(3) \int_{(0,\infty)} e^{-x} dm(x)$$

בהמשך **אולי** נראה את הקשר לאינטגרל הלא אמיתי מתורת רימן ואז ניתן להגיע לתשובה הסופית $I = \log(3)$.