אבנר סופר
אוניברסיטת תל אביב

# מבוא לפיזיקה מודרנית
# תורת היחסות הפרטית

## הכנה מתימטית לדינמיקה יחסותית

מאחר שתורת היחסות "חיה" במרחב-זמן 4- מימדי, שימושי לתאר אותה באמצעות וקטורים בעלי מימד זה.

וקטורים קשורים קשר הדוק בגיאומטריה של המרחב.

בפרק זה נציג את הכלים המתימטיים בהם נשתמש לטיפול בוקטורים כאלה.

### <u>וקטורים מרחביים</u>

המיקום של חלקיק הוא וקטור שיסומן ע" $\vec{r}$ .

וקטור ניתן להצגה ע"י מטריצת עמודה $3\times1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

המטריצה המוחלפת היא $\vec{r}^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ .

ריבוע אורך הוקטור (הנורמה שלו) נתון ע" המכפלה הסקלרית, שהצגתה המטריצית היא

$$|\vec{r}|^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}^T\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 .$$

שימו לב שמכפלה סקלרית היא מקרה פרטי של הפעולה $\vec{r}^T A\vec{r}$ , כאשר $A$ היא מטריצה.

במקרה של מכפלה סקלרית, $A=I$, כלומר, מטריצת היחידה.

**הגדרת וקטור מרחבי** נתונה ע"י כללי הטרנספורמציה שלו תחת סיבובים.

למשל, נסובב את הוקטור $\vec{r}$ סביב ציר z בזווית θ **עם** כוון השעון, ע"י הפעלת אופרטור סיבוב $R_z(\theta)$. אז הוקטור הופך לוקטור אחר, $\vec{r}'=R_z(\theta)\vec{r}$, שההצגה שלו היא

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta+y\sin\theta \\ -x\sin\theta+y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

<u>**שימו לב:**</u> באותה מידה יכולנו להגיד שאנו מסובבים את מערכת הקואורדינטות בזוית θ **נגד** כוון השעון סביב ציר z. אז מטריצת העמודה מצד ימין של המשוואה היא

**ההצגה של אותו הוקטור** $\vec{r}$ במערכת הקואורדינטות החדשה.

הנורמה של הוקטור החדש זהה לנורמה של $\vec{r}$, משום ש- $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

באופן כללי יותר, נדרוש שהנורמה אינוריאנטית תחת סיבובים, ומכאן נסיק תכונה של טרנספורמצית הסיבוב:

$$|\vec{r}'|^2=\vec{r}'^T\,\vec{r}'=(R\vec{r})^T(R\vec{r})=\vec{r}^T R^T R\vec{r},$$

כאשר השתמשנו בתכונת כפל המטריצות, $(R\vec{r})^T=\vec{r}^T R^T$.

אז כדי להבטיח שיתקיים $|\vec{r}'|^2=|\vec{r}|^2$ עבור כל וקטור, צריך לדרוש $R^T R=I$,

כאשר $I$ מטריצת היחידה.

כלומר, R מטריצה אורתוגונלית, המיצגת טרנספורמציה אורתוגונלית.

בשל אותו שיקול, ניתן לראות שמטריצות אורתוגונליות משמרות את המכפלה הסקלרית $\vec{a}\cdot\vec{b}$ של הוקטורים $\vec{a},\vec{b}$.

כלומר $\vec{a}'\cdot\vec{b}'=\vec{a}\cdot\vec{b}$, כאשר $\vec{a}',\vec{b}'$ מתקבלים מ- $\vec{a},\vec{b}$ ע"י סיבוב.

**סקלרים:** הנורמה של וקטור אינה משתנה תחת סיבובים, ולכן היא גודל סקלרי.

גדלים סקלרים אחרים בפיזיקה ניוטונית הם זמן, המסה של חלקיקי, ומטענו.

כאמור, וקטור מרחבי הוא כל סט של שלושה מספרים שביחד עוברים טרנספורמצית סיבוב לפי כלל הסיבוב שכתבנו למעלה.

ע"י כפל או חילוק וקטור בסקלר מקבלים וקטור חדש.

מכאן נגזרים הוקטורים המוכרים $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$,

והסקלר החשוב $E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$.

שלישית מספרים שאינם עוברים טרנספורמצית סיבוב לפי הכלל של וקטורים איננה וקטור.

למשל, $\begin{pmatrix} x \\ v_y \\ p_z \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} E \\ t \\ a_z \end{pmatrix}$ אינם וקטורים.

שימו לב שמכפלה סקלרית היא בין

- וקטור שהרכיבים שלו מסודרים כמטריצת שורה (נקרא לו וקטור קו-וריאנטי, covariant, או one-form).
    - נציג את רכיביו באמצעות $a_i$.
- וקטור שהרכיבים שלו מסודרים כמטריצת עמודה (נקרא וקטור קונטרה-וריאנטי, contravariant).
    - נציג את רכיבי הוקטור הזה באמצעות $b^i$.

אם כך, מכפלה סקלרית ניתנת לכתיבה ע"י $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i$.

איינשטיין פישט את הנוטציה ע"י כלל הידוע כ**סיכום איינשטיין** (Einstein summation):

אם אינדקס מסוים **מופיע פעמיים במכפלה, פעם למעלה ופעם למטה**, הכוונה היא שקיים סכום על האינדקס הזה גם אם לא כותבים את סימן הסכום (אלא אם מצוין מפורשות שאין סכום).

כלומר, כותבים בפשטות $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i$, והסכום מובן מאיליו.

**שימו לב** שהערכים של $a_i$ ושל $a^i$ שווים. לכן אפשר לכתוב

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$$

תיכף נראה שזו תכונה פרטית של גיאומטריה אאוקלידית, ובגיאומטרית מינקובסקי נצטרך לשים לב להבדל בין אינדקס עליון לאינדקס תחתון.

בנוטציה זו, מטריצה בעלת 3 שורות ושלושה טורים נכתבת כך: $A_i^{\ j}$.

מטריצה כזו היא הצגה (קרטזית או אחרת) של טנזור מדרגה 2, כי יש לה 2 אינדקסים.

באותה צורה, מטריצת שורה היא הצגה (קרטזית או אחרת) של טנזור מדרגה 1 (כלומר, וקטור).

## 4-וקטורים

ראינו שבפיזיקה יחסותית עוסקים ב-4 ממדים, משום שקיימת טרנספורמצית בוסט אשר – בדומה לסיבוב – מערבבת חלקית בין ממדי הזמן והמרחב.

לכן כאן נעבוד עם וקטורים 4-ממדיים, הנקראים 4-וקטורים.

אז הצגה קרטזית של וקטור המקום $\tilde{r}$ כוללת את הזמן בתור רכיב ה-0:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix}.$$

את רכיביו הקרטזים של וקטור כללי $\tilde{a}$ נהוג לסמן גם באמצעות $\begin{pmatrix} a^t \\ a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$,

או בצורה הקומפקטית $a^\mu$, כאשר נהוג שאינדקס יווני הולך מ-0 עד 3, בשעה שאינדקס רומי משמש לציון הרכיבים המרחביים (1 עד 3) בלבד.

סכום או הפרש של 4-וקטורים גם הוא 4-וקטור. בפרט, ההפרש בין הוקטורים שמתארים את המיקום של שני ארועים קרובים הוא גם 4-וקטור:

$$d\tilde{r} = \lim_{\tilde{r}^1 \to \tilde{r}^2} \left(\tilde{r}^1 - \tilde{r}^2\right) = \begin{pmatrix} t^1 - t^2 \\ x^1 - x^2 \\ y^1 - y^2 \\ z^1 - z^2 \end{pmatrix}$$

על 4-וקטור המקום אפשר להפעיל את אותה טרנספורמצית סיבוב שהפעלנו קודם:

$$R_z(\theta)\tilde{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

בנוסף, ניתן להפעיל טרנספורמצית בוסט, למשל:

$$\Lambda_x(\beta)\tilde{r} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

כאשר $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

כמו במקרה של סיבובים, את התוצאה המתימטית של הבוסט ניתן לראות בשתי צורות שונות:

1. אותו הוקטור כפי שהוא נראה במערכת קואורדינטות שנעה במהירות β בכוון +x ביחס למערכת הראשונה
2. וקטור חדש $\tilde{r}'$, המתקבל מהוקטור הישן ע"י בוסט בגודל β בכוון –x.

השוו למקרה של סיבובים ושתי הדרכים לראות את תוצאת הסיבוב.

כשמבצעים בוסט אנו רוצים לראות כיצד אותו וקטור נראה במערכת אחרת, לכן צורת ההתבוננות הראשונה תהיה יותר רלוונטית עבורנו.

כמו שהנורמה של 3-וקטור נשמרת תחת סיבובים, שימושי להגדיר נורמה של 4-וקטורים שנשמרת תחת סיבובים ובוסטים.

מאחר שפעולות אלה משמרות את ריבוע האינטרוול $t^2-|\vec{r}|^2$, נגדיר גודל זה להיות ריבוע הנורמה של 4-וקטור:

$$|\tilde{r}|^2=t^2-x^2-y^2-z^2.$$

כמו במקרה של 3-וקטורים, נרצה לקבל את ריבוע הנורמה ע"י מכפלה סקלרית של הוקטור בעצמו. לשם כך, נגדיר את המכפלה הסקלרית בצורה הבאה:

$$|\tilde{r}|^2=\tilde{r}\cdot\tilde{r}=\tilde{r}^T\eta\tilde{r}=\begin{pmatrix}t & x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=t^2-x^2-y^2-z^2$$

כאשר $\eta$ נקראת מטריצת **המטריקה** של מינקובסקי.

**המטריקה** של גיאומטריה מסוימת היא הפונקציה שמשמשת במדידת מרחקים אינפיניטסימלים בגיאומטריה הנתונה, וע"י כך מגדירה את הגיאומטריה.

למשל, עבור גיאומטריה אאוקלידית, מרחקים מחושבים באמצעות מטריצת היחידה:

$$dr^2=d\vec{r}^TId\vec{r}=dx^2+dy^2+dz^2.$$

בגיאומטריה היפרבולית, זה נעשה ע"י מטריצת המטריקה של מינקובסקי:

$$ds^2=d\tilde{r}^T\eta d\tilde{r}=dt^2-dr^2.$$

ביחסות כללית עובדים במרחבים מעוקמים, ואז המטריקה היא פונקציה של המקום (והזמן).

כמו במקרה האאוקלידי, מכפלה סקלרית בין שני 4-וקטורים כלליים משתמשת אף היא במטריצת המטריקה:

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b}=\tilde{a}^T\eta\tilde{b}=a^0b^0-a^1b^1-a^2b^2-a^3b^3 \quad (1)$$

התוצאה של המכפלה היא **סקלר** – גודל אינוריאנטי תחת טרנספורמצית לורנץ (כך בנינו את הנורמה, ע"י בחירתה להיות האינטרוול האינוריאנטי).

שימו לב שגם במכפלה הסקלרית של מרחב אאוקלידי ישנה מטריצה, מטריצת היחידה:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^TI\vec{b}$$

**הערה:** וקטור בעל ריבוע נורמה חיובי\אפס\שלילי הוא וקטור שהוא SL\LL\TL.

נזכר כי מהדרישה שמטריצת סיבוב משמרת את הנורמה של 3-וקטורים, מצאנו את התנאי $R^T R = I$.

כעת נשאל מה ניתן ללמוד על מטריצת הבוסט $\Lambda$ מהדרישה שהיא שומרת על הנורמה של הוקטור:

$$\tilde{r}'\cdot\tilde{r}' = \tilde{r}'^T \eta \tilde{r}' = (\Lambda\tilde{r})^T \eta (\Lambda\tilde{r}) = \tilde{r}^T \Lambda^T \eta \Lambda \tilde{r},$$

כדי לשמר את הנורמה, גודל זה צריך להיות שווה ל- $\tilde{r}^T \eta \tilde{r}$.

מאחר שהוקטור $\tilde{r}$ הוא שרירותי, נסיק שמתנאי שימור הנורמה נובע $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

שימו לב לדמיון למה שקיבלנו עבור סיבובים במרחב אאוקלידי: $R^T I R = I$.

תנאי זה מגדיר חבורה של אופרטורים הנקראת **חבורת לורנץ**:

אופרטור השייך לחבורת לורנץ הוא כל אופרטור המיוצג ע"י מטריצה המקיימת את התנאי

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

אופרטורים כאלה הם בוסטים וסיבובים, בעלי ההצגות הבאות בקואורדינטות קרטזיות:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_x(\beta)=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Lambda_y(\beta)=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & -\gamma\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_z(\beta)=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

וגם ארבעת האופרטורים שהופכים את כווני הקואורדינטות:

$$P=\begin{pmatrix}\pm1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pm1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix},$$

כאשר הסימן של כל איבר ששונה מ-0 נקבע באופן בלתי תלוי בסימני האיברים האחרים. גם $\eta$ הוא אופרטור מסוג זה.

מכפלה של שני חברים בחבורה נותנת אופרטור שגם הוא חבר בחבורה.

**נוטציית איינשטיין ב-4 ממדים:**

גם במקרה היחסותי, שימושי לכתוב את המכפלה הסקלרית עם הנוטציה הפשוטה של איינשטיין, באמצעות רכיבי הוקטור הקו-וריאנטי והוקטור הקונטרה-וריאנטי:

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b}=a_\mu b^\mu,$$

כאשר קיים סכום נרמז: $a_\mu b^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = a_0b^0+a_1b^1+a_2b^2+a_3b^3$.

כדי שסכום זה יתן את המכפלה הסקלרית $a^0b^0-a^1b^1-a^2b^2-a^3b^3$, יש לשים לב שבניגוד למקרה האאוקלידי, בו הרכיבים של הוקטור הקו-וריאנטי שווים לרכיבים של הוקטור הקונטרה-וריאנטי, במרחב מינקובסקי המעבר בין שני סוגי הוקטורים צריך להפוך את הסימן של הרכיבים המרחביים.

כלומר, $a_0 = a^0, \quad a_i = -a^i$.

כלומר, כאשר מעלים או מורידים את האינדקס של אלמנט מרחבי של וקטור, משנים את סימנו.

בנוטצית איינשטיין, ניתן להציג את הבוסט ע"י רכיבי הטנזור $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ של טרנספורמצית לורנץ,

ותוצאת הפעולה היא $a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$.

טרנספורמציה של וקטור קו-וריאנטי היא $a'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a_{\mu}$.

הרכיבים $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ מתאימים להצגה המטריצית של 4×4 שכתבנו למעלה עבור מטריצות הבוסט.

ננסה להמחיש מה קורה בביטוי כגון $a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$:

שימו לב ש-ν הוא אינדקס של השורה במטריצת העמודה $a^{\nu}$, והוא אינדקס של העמודה

במטריצה 4×4 $\Lambda^{\mu}_{\nu}$.

אם כן, $\Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$ מתאר מכפלת מטריצות רגילה: עבור כל ערך של μ (רכיב של וקטור התוצאה),

כופלים איבר של המטריצה $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ באיבר של הוקטור $a^{\nu}$, ומוסיפים לזה את המכפלה הבאה תוך

"ריצה" על עמודות המטריצה ושורות הוקטור (כלומר, ריצה על האינדקס ν).

נדגים בשני ממדים (לשם פשטות):

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 a^0 + \Lambda^0_1 a^1 \\ \Lambda^1_0 a^0 + \Lambda^1_1 a^1 \end{pmatrix}$$

שימו לב למספרים שמייצגים את ν ולאלה שמייצגים את μ.