פתרון תרגיל בית 8

שאלה 1

נניח ש $f:X\to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים, $\{A_i:i\in I\}$ כיסוי פתוח של X ולכל $i\in I$ $f|_{A_i}:A_i\to Y$ רציפה. הוכיחו ש $f:X\to Y$ רציפה.

פתרון

נראה שלכל U פתוחה ב- Y $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X ומכאן $f:X\to Y$ רציפה. תהי U פתוחה ב- Y. $\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(U)$ פתוחה ב- A_i לכל $i\in I$. זה נובע מרציפות הפונקציה $f|_{A_i}:A_i\to Y$ (לכל $i\in I$). כעת, לכל $i\in I$ A_i פתוחה ב- X. מכאן, $\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(U)$ פתוחה ב- X לכל $i\in I$. מכיוון שאיחוד כלשהו של פתוחות הוא קבוצה פתוחה נקבל ש $\bigcup_{i\in I}\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. לבסוף, נשים לב שמכיון ש $\{A_i:i\in I\}$ כיסוי של X אז מתקיים:

$$f^{-1}(U)=\{x\in X:f(x)\in U\}=\bigcup_{i\in I}\{x\in A_i:f(x)\in U\}=$$
$$=\bigcup_{i\in I}\left\{x\in A_i:f|_{A_i}(x)\in U\right\}=\bigcup_{i\in I}\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(U)$$

ומכאן נסיק הדרוש.

שאלה 2

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3 : X \to \mathbb{R}$ עבור $X = [2,3] \cup [4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [4,5) \end{cases}$.

<u>פתרון</u>

א) הפונקציה <u>לא רציפה</u> שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י היינה $\frac{1}{n} \to 0$ אבל $f_1\left(\frac{1}{n}\right) = n \not\to 1 = f_1(0)$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u> כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1((-1,1)) = [1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה סגורה</u> כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1([0,\infty)) = \{1\} \cup (0,\infty) = (0,\infty)$ ו- $(0,\infty)$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

ב) הפונקציה <u>לא רציפה</u>. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש$\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u>: $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>סגורה</u>: לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) $f_2(A)$ סגורה. אמנם, אם $A = \varnothing$ נקבל $f_2(A) = \varnothing$. אם $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A) = \{1\}$. אם $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A) = \{0\}$ ובכל מקרה אחר נקבל $f_2(A) = \{0,1\}$.

ג) הפונקציה <u>רציפה</u> שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות: $h:[2,3] \to \mathbb{R},\quad h(x) = 1$, $g:[4,5) \to \mathbb{R},\quad g(x) = x$. שתי הפונקציות רציפות ($h$ פונקציה קבועה ו- g פונקציית ההכלה). $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח ל X (למעשה $[2,3]$ וכן $[4,5)$ אפילו סגוחות ב X (בדקו!)). $[2,3] \cap [4,5) = \varnothing$. לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של f_3.

הפונקציה <u>לא פתוחה</u> ו<u>לא סגורה</u> שכן $[4,5)$ סגוחה ב X אבל $f_3([4,5)) = [4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f\left(X\right)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f\left(X\right)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f\left(X\right)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

<u>פתרון</u>

א) תהי $f:X\to Y$.

1) נניח ש $f:X\to Y$ פתוחה ונוכיח ש $f:X\to f(X)$ פתוחה. תהי U פתוחה ב- X. מההנחה מתקיים $f\left(U\right)$ פתוחה ב Y. מתקיים $f\left(U\right)\subseteq f(X)$ ולכן $f\left(U\right)=f(U)\cap f(X)$. מכיון ש $f(U)$ פתוחה ב Y וכן $f\left(U\right)=f(U)\cap f(X)$ נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש $f\left(U\right)$ פתוחה ב$f\left(X\right)$.

2) ההוכחה של המקרה שבן נתון ש $f:X\to Y$ סגורה וצ"ל ש $f:X\to f(X)$ סגורה, דומה מאד להוכחה של סעיף א. רק בשלב הסופי יש להיעזר בתרגיל בית שמדבר על אפיון קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.

ב) 1) דוגמא נגדית לעובדה שמכך ש- $f:X\to f(X)$ פתוחה לא נובע ש- $f:X\to Y$ פתוחה.

יהיו $Y=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{Z}$ ו $f=i$ העתקת ההכלה. כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Z}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Z}$ על $\mathbb{Z}$. אבל, $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{Z}$ פתוחה ב $\mathbb{Z}$ אבל $i\left(\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

2) דוגמא נגדית שניה: $f:X\to f(X)$ סגורה ו- $f:X\to Y$ אינה סגורה.

יהיו $Y=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{Q}$ ו- $f=i$ העתקת ההכלה כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Q}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Q}$ על $\mathbb{Q}$. מצד שני $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה סגורה כי למשל $\mathbb{Q}$ סגורה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>הערה</u>: דוגמא נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמא נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה $i:\mathbb{Q}\to i(\mathbb{Q})$ היא גם פתוחה והפונקציה $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי $\mathbb{Q}$ פתוחה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

<u>פתרון</u>

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת קבוצה סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב X איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב X תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית A.

אם A סגורה ושונה מ X הרי ש A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש A^c סופית. מכאן $X=A\cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה: X קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

<u>תזכורת</u> – הישר של סורגנפריי. נסמן ב- $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

<u>פתרון</u>

א. יהי A תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונוכיח שהוא אינו קשיר. קיימות ב-A לפחות שתי נקודות שנסמנן $x,y\in A$. בה"כ נניח $x<y$. נגדיר $U=(-\infty,y)\bigcap A\ ,\ V=[y,\infty)\bigcap A$. ברור ש-$U,V$ זרות ולא ריקות (שכן $x\in U,\ y\in V$). נותן להראות שהן פתוחות בתת המרחב A. מספיק להראות ש-$(-\infty,y),[y,\infty)$ פתוחות ב-$\mathbb{R}_\ell$. מכיוון שראינו שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה האוקלידית (הסטנדרטית) על $\mathbb{R}$, ידוע ש-$(-\infty,y)$ פתוחה. כעת, את $[y,\infty)$ ניתן להציג כ: $[y,\infty)=\bigcup\limits_{y<c}[y,c)$ ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

מכאן, מכיוון ש-$U\bigcup V=A$ נקבל ש-A לא קשיר.

ב. קודם כל, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה. נוכיח שאלה הן כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. נניח בשלילה שקיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$ פונקציה רציפה שאינה קבועה. מכיוון ש-$\mathbb{R}$ קשיר, נקבל ש-$f(\mathbb{R})$ הוא תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}_\ell$. הפונקציה אינה קבועה ולכן ב-$f(\mathbb{R})$ יש יותר מנקודה אחת. וזאת בסתירה לסעיף א'.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

יהי $(X,\|\ \|)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:\left(X,\| \ \|\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:\left(X,\| \ \|\right)\to\left(X,\| \ \|\right)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:\left(X,\| \ \|\right)\to\left(X,\| \ \|\right)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0,\ a\in X)$ הומיאומורפי ל-$B(0,1)$.

<u>פתרון</u>

1. נראה רציפות בנקודה שרירותית x. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שלכל $y\in X$ המקיימת $\|x-y\|<\delta$ מתקיים

$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|<\delta=\varepsilon$. נוכיח את אי השוויון $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$ עפ"י אי שוויון המשולש של הנורמה

$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|\to\|x-y\|\ge\|x\|-\|y\|$ ניתן להוכיח בצורה דומה $\|x-y\|\ge\|y\|-\|x\|$ ולכן בסה"כ $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$.

2. נראה רציפות בנקודה שרירותית x. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שלכל $y\in X$ המקיימת $\|x-y\|<\delta$ מתקיים $\|g(x)-g(y)\|=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|<\delta=\varepsilon$.
3. אם $c=0$ נקבל העתקה קבועה. (העתקת האפס) והיא רציפה. עבור $c\neq 0$ נוכיח רציפות בנקודה שרירותית x. עבור $\varepsilon>0$ ניתן לקחת $\delta=\frac{\varepsilon}{|c|}$ ולקבל הדרוש. הערה: הפונקציות בסעיף זה ובסעיפים הקודמים למעשה רבמ"ש.
4. תהי $h:B(a,\varepsilon)\to B(0,1)$ העתקה המוגדרת ע"י $h(z)=\frac{1}{\varepsilon}(z-a)$ (קל לבדוק שאכן התמונה מוכלת בכדור היחידה) זו העתקה רציפה עפ"י סעיפים 2,3 (הזזה בווקטור $-a$ וכפל בסקלר $\frac{1}{\varepsilon}$) ו- $h^{-1}:B(0,1)\to B(a,\varepsilon)$ ההופכית של h היא הפונקציה $h^{-1}(z)=\varepsilon z+a$ שמוגדרת אף היא באמצעות כפל בסקלר

והזזה ולכן רציפה אף היא עפ"י הסעיפים הקודמים. מכאן ש $B(0,1)$ ו- $B(a,\varepsilon)$ הומיאומורפיים.

מש"ל