אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 5

1. נסמן $E=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}$. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\{x\in X: g(x)<\alpha\}=\{x\in E: g(x)<\alpha\}\cup\{x\in E^c: g(x)<\alpha\}=\{x\in E: g(x)<\alpha\}\cup\{x\in E^c: f(x)<\alpha\}$$
$$=\{x\in E: g(x)<\alpha\}\cup\left(\{x\in X: f(x)<\alpha\}\cap E^c\right)$$

הקבוצה $\{x\in E: g(x)<\alpha\}$ מוכלת ב-E שמידתה אפס, ולכן מדידה (כי המידה שלמה).
ושאר הקבוצות בביטוי האחרון גם הן מדידות.

2. נלך בעקבות ההדרכה:

א. כמו בתרגיל שעבר נשתמש בפיתוח לטור הנדסי:

$$-\int_0^1 \frac{\log^{s-1}x}{1-x}\,dm(x)=-\int_0^1 \log^{s-1}x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,dm(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-\int_0^1 x^n\log^{s-1}x\,dm(x)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(s-1)!}{(n+1)^s}=(-1)^s(s-1)!\zeta(s)$$

החילוף בין הסכימה לאינטגרציה נעשה ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית בגרסת טורי פונקציות אי שליליות (כש-s זוגי יש להכניס את המינוס לתוך האינטגרל). חישוב האינטגרל נעשה בעזרת אינטגרציה לפי חלקים.

ב. ההצבה $x=e^{-t}$ מביאה לנוסחה הנדרשת.

3. נלך לפי ההדרכה:

א. תהי E מדידה. קל לראות ש-$I_E(ax+b)=I_{\frac{E}{a}-\frac{b}{a}}(x)$, ומכאן

$$\int_{\mathbb{R}} I_E(ax+b)=m\left(\frac{E-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}m(E)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} I_E(x)$$ (השתמשנו בתוצאה מתרגיל קודם)

ב. תהי $\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_kI_{E_k}$ פשוטה. ע"פ לינאריות האינטגרל + סעיף א' מקבלים

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(ax+b)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{n}a_kI_{E_k}(ax+b)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}a_kI_{E_k}(ax+b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}}a_kI_{E_k}(x)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)$$

ג. תהי $f\geq 0$ מדידה. נבנה סדרה עולה של פונקציות פשוטות $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת אל $f(x)$. פשוט לראות כי גם $\{\varphi(ax+b)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה של פונקציות פשוטות, וגבולה $f(ax+b)$. ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית (פעמיים):

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(ax+b)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(ax+b)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(x)$$

ד. אם $g(x)=f(ax+b)$, אזי

$g^{+}(x)=\max(g(x),0)=\max(f(ax+b),0)=f^{+}(ax+b)$ (וכנ"ל עבור g^{-}) ע"פ הסעיף הקודם:

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)=\int_{\mathbb{R}} g(x)=\int_{\mathbb{R}} g^{+}(x)-\int_{\mathbb{R}} g^{-}(x)=\int_{\mathbb{R}} f^{+}(ax+b)-\int_{\mathbb{R}} f^{-}(ax+b)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f^{+}(x)-\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f^{-}(x)$$

$$=\frac{1}{|a|}\left(\int_{\mathbb{R}} f^{+}(x)-\int_{\mathbb{R}} f^{-}(x)\right)=\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(x)$$

כל האינטגרלים מתכנסים כי נתון ש- f אינטגרבילית.