תרגול 12- אושרית

אקסיומת הבחירה, הלמה של צורן ועקרון המקסימום של האוסדורף

אקסיומת הבחירה [עריכה]

- תהי S קבוצת קבוצות לא ריקות, ונסמן את האיחוד הכללי ב $U = \bigcup_{X \in S} X$.
- אזי קיימת פונקציית בחירה $f : S \to U$ הבוחרת איבר מתוך כל קבוצה, כלומר:
- $\forall X \in S : f(X) \in X$

דוגמא פשוטה להבנת הרעיון:

הנה דוגמה לפונקציה שכזו עבור מקרה ספציפי: נניח ש-$X = \{\{1,2\},\{a,b,c\}\}$, אז פונקציית בחירה לדוגמה היא הפונקציה הבאה: $f(\{1,2\}) = 1,\ f(\{a,b,c\}) = c$.

ובכן, במקרים רבים אכן אין כאן בעיה. כל עוד קל לתת תיאור מפורש של הפונקציה, או לפחות תיאור של דרך כלשהי לבנות אותה, הכל בסדר. לכן אם X היא קבוצה סופית, אפשר תמיד לתאר פונקציה על ידי כתיבה מפורשת של האיבר שמתאימים לכל אחת מהקבוצות שב-X. גם אם X אינסופית אבל בת מניה (כלומר, אפשר להתאים מספר טבעי לכל איבר בה) אין בעיה של ממש, כי אפשר לתאר אלגוריתם שמחשב, בסופו של דבר, לכל איבר של X מה יהיה האיבר ש"נבחר" ממנה. הבעיה מתחילה רק כשצריך לבחור איבר למספר לא בן מניה של קבוצות.

הלמה של צורן

למה ששקולה לאקסיומת הבחירה

הרבה פעמים בתרגילים נעדיף להשתמש בה.

למה של צורן הגדרה מקדימה:

ניסוח [עריכה]

תהי X **קבוצה סדורה חלקית** (קבוצה עם יחס סדר חלקי $\leq$). תת-קבוצה C של X הסדורה קוית (כל שני איברים של C ניתנים להשוואה) נקראת **שרשרת**.

דוגמא לשרשרת:

היחס מחלק את על הטבעיים הוא יחס סדר חלקי.
דוגמא לשרשרת בו:

$$2^0 \leq 2^1 \leq 2^2 \leq 2^3 \leq 2^4 \leq \cdots \leq 2^n \leq \cdots$$

הלמה של צורן. תהי X קבוצה לא ריקה, עם התכונה שלכל שרשרת (לא ריקה) ב-X יש חסם מלעיל. אז יש ב-X איבר מקסימלי.

מתקיים עבורם באופן ריק

4. הוכיחו שקיימת קבוצה S של מספרים ממשיים המקיימת:

א. לכל $a \neq b \in S$, $a-b$ אי רציונלי.

ב. לכל $a \notin S$ יש $b \in S$ כך ש $a-b$ רציונלי.

פתרון:

תהי D קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שמקיימות: $A \ni b \neq a \Longleftarrow \mathbb{Q} \notin b-a$.

ראשית, D לא ריקה, כי יש בה למשל נקודונים. נוכיח שקיים בD איבר מקסימלי. ובכן, תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD (עם יחס ההכלה). צריך למצוא לה חסם מלעיל. ובכן, נקח את $\cup A_i$. ברור שהוא חסם של השרשרת. צריך להוכיח שהוא שייך לD. יהיו $a \neq b \in \cup A_i$. כלומר, קיימים i,j כך ש $a \in A_i, b \in A_j$. בה"כ $i<j$, לכן $A_i \subseteq A_j$, כלומר $a, b \in A_j$. $A_j \in D$ ולכן $a-b$ אי רציונלי.

מהלמה של צורן נקבל שקיים בD איבר מקסימלי, נסמנו בS.

יהי $a \notin S$. אם לכל $b \in S$ $a-b \notin \mathbb{Q}$, אז $S \subseteq S \cup \{a\} \in D$, בסתירה למקסימליות של S.

עקרון המקסימום של האוסדורף [עריכה]

- תהי קבוצה A עם יחס סדר חלקי, תת קבוצה $S \subseteq A$ נקראת שרשרת אם היחס מלא עליה (ניתן להשוות בין כל שני איברים בS).
- שרשרת נקראת מקסימלית בA אם היא אינה מוכלת באף שרשרת אחרת.
- עקרון המקסימום של האוסדורף אומר שכל שרשרת מוכלת בשרשרת מקסימלית.

תרגיל:

אחת מאקסיומות הנוספות השקולות לאקסיומת הבחירה היא "עיקרון המקסימום של האוסדורף" שאומר את הדבר הבא: בכל קבוצה סדורה חלקית לא ריקה קיימת שרשרת מקסימלית (ביחס להכלה). הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן שקולה לעיקרון המקסימום של האוסדורף.

הוכחה:

נוכיח את שני הכיוונים:

$\Leftarrow$ תהי A קבוצה לא ריקה. נגדיר את X להיות אוסף השרשראות המוכלות בA. X הינה קבוצה סדורה חלקית עם יחס סדר ההכלה. X אינה ריקה, כי כל נקודון שמוכל בA הוא למעשה שרשרת. נוכיח שלכל שרשרת בX יש חסם. ובכן, תהי $\{Y_i\}$ שרשרת בX. כלומר, כל Y_i הינו תת שרשרת של A, ולכן i,j מתקיים: $Y_i \subseteq Y_j \vee Y_j \subseteq Y_i$. ובכן, נקח $Y = \bigcup Y_i$. ברור שY הינו חסם של השרשרת, כי כל איבר בשרשרת מוכל בY. צריך

כלומר להראות ש**Y** הוא שרשרת

להוכיח שY הוא אכן איבר של X: היו $x,y \in Y$. $\exists i,j : x \in Y_i, y \in Y_j$. בה"כ $Y_i \subseteq Y_j$ ולכן $x,y \in Y_j$. Y_j הינה שרשרת, ולכן ניתן להשוות בין x לy. קיבלנו שבין כל שני איברים של Y ניתן להשוות, ולכן Y הינו שרשרת. מהלמה של צורן נקבל שקיים איבר מקסימלי בX, כלומר, קיימת שרשרת מקסימלית בA.

$\Longrightarrow$ תהי A קס"ח לא ריקה, שמקיימת את התנאי שכל שרשרת בA חסומה. רוצים להוכיח שיש בA איבר מקסימלי. מעיקרון המקסימום של האוסדורף, יש בA שרשרת מקסימלית, B. מההנחה, קיים איבר $a \in A$ שגדול שווה מכל איברי B. אם $a \notin B$, אז $B \cup \{a\}$ היא שרשרת שמכילה את B וזה סותר את המקסימליות. לכן $a \in B$. (a הוא המקסימום של השרשרת). נטען שa מקסימלי בA. אחרת, קיים $a < x \in A$, ו$B \cup \{x\}$ יהווה שרשרת שמכילה ממש את B, בסתירה למקסימליות של B.

תרגיל:

מהעולם של לינארית: שימוש בלמה של צורן

לכל מרחב וקטורי יש בסיס [עריכה]

משפט. לכל מרחב וקטורי יש בסיס.

זו טענה שאפשר להוכיח באינדוקציה אם יש למרחב בסיס סופי, אבל המקרה הכללי דורש כלים מתקדמים יותר.

הוכחה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. נסמן ב-X את משפחת תת-הקבוצות של V שאינן תלויות לינארית (הקבוצה הריקה שייכת ל-X, ולכן X אינה ריקה). נוכיח ש-X סגורה לאיחוד של שרשראות. אכן, תהי C שרשרת ב-X. נתבונן באיחוד $\bigcup_{A\in C} A$. יהיו $v_1,\dots,v_n \in \bigcup_{A\in C} A$ אברים של המרחב, כך שקיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$ כך ש- $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$. לכל $i=1,\dots,n$ יש איבר $A_i \in C$ כך ש-$v_i \in A_i$; אבל C היא שרשרת, ולכן מבין האברים $A_1,\dots,A_n$ יש אחד המכיל את כולם; נאמר שזהו A_n. אז $v_1,\dots,v_n \in A_n$, אבל A_n בלתי תלויה לינארית (משום שהיא שייכת ל-X), ולכן המקדמים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ שווים כולם לאפס.

לפי הלמה של צורן, יש ב-X קבוצה מקסימלית, שנסמן ב-B. היא בלתי-תלויה לינארית (משום שכל הקבוצות ב-X כאלה). נשאר להראות שהיא פורשת את המרחב V. יהי $v \in V$. אם הוקטור v אינו נפרש על-ידי B, אז הקבוצה $B\cup\{v\}$ בלתי-תלויה לינארית, וזו סתירה למקסימליות של B. לכן כל וקטור נפרש על-ידי B, ומכאן ש-B בסיס.

שימושים בעוצמות:

ללא הוכחה ☺

סבוכ ומכפלה של עוצמות [עריכה]

משפט. לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $|A \times A| = |A|$.

מסקנה. לכל שתי קבוצות אינסופיות A,B מתקיים $|A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$.

בהצלחה!!!