R - תחום ראשי(למשל $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{F}[\lambda]$)

המטרה

למיין מודולים נוצרים סופית מעל R.
כל מודול נוצר סופית הוא $R^n/\square$.

הערה

תהי $A \in M_n(R)$.

$$A \cdot R^n = \{Ax | x \in R^n\} = \{\text{linear combination of } A\text{'s columns}\} =$$

$$= A\text{'s column space} \leq R^n$$

.....

דוגמה 1

$R = \mathbb{F}$ שדה.

B מטריצה דומה ל $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

מספר ה1ים הוא $\text{rank } A$. יש רק $n+1$ מחלקות שקילות.
למשל עבור $n = 2$ יש 3 מחלקות שקילות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה

$n = 1$. $a \sim b \Leftrightarrow (a) \sim (b)$, כלומר

$$\exists u \in U(R), b = au \in M_1(R)$$

טענה

אם $A \sim B$ אז $M_A \cong M_B$

הוכחה

נניח שP, Q הפיכות.

$$A \cdot Q \cdot R^n = AR^n$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall_x Q\left(Q^{-1}X\right) = X \\ \Rightarrow QR^n = R^n\end{gathered}}$$

$$\Rightarrow M_A = M_B$$

מצד שני, נראה ש

$$^{R^n}/_{AR^n} = M_A \cong M_{PA} = {}^{R^n}/_{PAR^n}$$

על ידי

$$\varphi : x + AR^n \mapsto Px + PAR^n$$

זה מוגדר היטב כי אם $x + AR^n = y + AR^n$ אז $\exists_u y - x = Au$

$$\Rightarrow P_y - P_x = PAu \in PAR^n$$

$$\Rightarrow P_y + PAR^n = Px + PAR^m$$

- הומומורפיזם של מודולים - תרגיל.
- φ על כי $\varphi\left(\overline{P^{-1}x}\right) = \overline{x}$
- φ חח"ע כי $\varphi\left(\overline{x}\right) = \overline{Px} = \overline{0} \Leftarrow Px \in PAR^m \Leftarrow x \in AR^m$

הגדרה

מטריצה מהצורות:

- $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \cdots & \cdots & c \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $c \in R$

- $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $u \in U(r)$

- $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

נקראות מטריצות אלמנטריות.
כפל מימין או משמאל במטריצה כזו נקרא פעולה אלמנטרית על שורות או עמודות.

<u>כולן הפיכות!</u>
נסמן:

- $GL_n(R) = \{$מטריצות הפיכות$\}$(זו חבורה)
- תת החבורה הנוצרת על ידי מטריצות אלמנטריות$= E_n(R) \subseteq GL_n(R)$

נסמן

$$GL(R) = \bigcup GL_n(R)$$

$$E(R) = \bigcup E_n(R)$$

מבוא לתורת K

$$E(R) \lhd GL(R)$$

הגדרה

$K_1(R) = {}^{GL(R)}/_{E(R)}$ - זו חבורה אבלית.

עובדות

- אם R תחום אוקלידי, $E_n(R)=GL_n(R)$
- לכל <u>תחום ראשי</u> R, $K_1(R)=0$.

למעשה,

$$GL(R)=\langle E(R), GL_2(R)\rangle$$

הגדרה

$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ כאשר $d_n \mid \cdots \mid d_1$ היא צורה קנונית.

[לדוגמה, $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ מעל שדה, $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 12 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Z}$]

משפט

R ראשי. כל מטריצה $A\in M_n(R)$ דומה למטריצה בצורה קנונית.

הוכחה

נגדיר את ה"אורך" של $0\neq a\in R$ להיות $d(a)$ אם R אוקלידי, או מספר הגורמים הראשוניים אחרת.

ההוכחה באינדוקציה על n. עבור n קבוע, ההוכחה האינדוקציה על האורך המינימלי של איבר במטריצה.

על ידי החלפת שורות ועמודות אפשר להניח ש$a=A_{11}$ הוא הקצר ביותר מבין הרכיבים שאינם אפס.

אפשר להחליף את A במטריצה דומה כך שהאורך של המספר הקצר ביותר יחיד מינימלי.

טענה: a מחלק כל איבר b בשורה הראשונה.

הוכחה: בחוג אוקלידי, נכתוב $b=q\cdot a+r$ ונחסר מהעמודה של b כפולות q של העמודה של a. כעת במקום b נמצא r, וזו סתירה למינימליות של a - אלא אם $r=0$.

אחרת, נכתוב $Rd=Ra+Rb$ ($\gcd(a,b)=d$).

כלומר $d \mid a,b$. קיימים $\alpha,\beta\in R$ כך ש$\alpha a+\beta b=d$. אם $b \nmid a$ אז d קצר[1] מa.
נתבונן במטריצה

$$P=\begin{pmatrix}\alpha & -\frac{b}{\alpha}\\ \beta & \frac{a}{d}\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{a}{d} & \frac{b}{\alpha}\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix}a & b & \cdots\\ * & * & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\frac{b}{\alpha} & & & \\ \beta & \frac{a}{d} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & 0 & \cdots\\ * & * & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\frac{b}{\alpha}\\ \beta & \frac{a}{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & 0\\ & \end{pmatrix}$$

זה סותר את המינימליות של a, אלא אם $a \mid b$
כעת אפשר לאפס בעזרת a את השורה הראשונה.
כנ"ל, אפשר לאפס בעזרת a את העמודה הראשונה.
לכן

$$A\sim\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{c|ccc}a & & & \\ \hline & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{array}\right)$$

$$d_2\mid d_3\mid\cdots\mid d_n$$

נשאר להוכיח ש$a \mid d_2$. אבל $\begin{pmatrix}a & d_2 & \\ & d_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$, ולפי הטענה $a \mid d_2$
כי d_2 בשורה של a.

דוגמה

$$\begin{pmatrix}12 & 8\\ 6 & 40\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6 & 40\\ 12 & 8\end{pmatrix}\overset{C_2-6C_1}{\sim}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 12 & -64\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 6\\ -64 & 12\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{C_2-C_1}{\sim}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -64 & 76\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 4\\ 76 & -64\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0\\ 76 & -216\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -216\end{pmatrix}$$

[1]מבחינת מספר הגורמים הראשוניים

סימון

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$$M_{A\oplus B} \cong M_A \oplus M_B$$

הערה

הגדרנו סכום של תת מודולים.
הסכום $N = K_1 + \cdots + K_t$ הוא <u>סכום ישר</u> אם

$$0 = k_1 + \cdots + k_t, k_i \in K_i \Rightarrow \forall_i k_i = 0$$

(≡ ההצגה של כל $v \in N$ כסכום $k_1 + \cdots + k_n$ היא יחידה)
במקרה כזה מסמנים $N = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$

לדוגמה

$R^{n+m} \cong R^n \oplus R^m$

הוכחה ש$M_{A\oplus B} = M_B \oplus M_B$

$$M_{A\oplus B} = {}^{R^{n+m}}\!/\!\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} R^{m+n} = {}^{R^{n+m}}\!/\!\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\frac{R^n}{R^m}\right) =$$

$$= \left(\frac{R^n}{R^m}\right)\Big/\left(\frac{AR^n}{AR^m}\right) = {}^{R^n}\!/_{AR^n} \oplus {}^{R^m}\!/_{BR^m} = M_A \oplus M_B$$

נניח ש

$$A \sim \left(\begin{array}{c|cccc} a_1 & & & & \\ \hline & \boxed{d_2} & & & \\ & & \boxed{d_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{d_n} \end{array}\right)$$

$$(d_1) \oplus (d_2) \oplus \cdots \oplus (d_n)$$

$$\Rightarrow M_A = M_{(d_1)} \oplus \cdots \oplus M_{(d_n)}$$

הגדרה

לכל $a \in R$, "מודול ציקלי" $M_{(a)} = {}^{R}/_{Ra}$.

הוכחנו משפט

כל מודול נוצר סופית M מעל תחום ראשי איזומורפי לסכום ישר של מודולים ציקליים.

נניח ש$M \cong M_A$ כאשר $A \in M_n(R)$. $A \sim \mathrm{diag}(d_1, \dots d_n)$ ואז $M = \bigoplus_{i=1}^{n} {}^{R}/_{Rd_i}$

לדוגמה, מעל $R = \mathbb{Z}$, חישבנו את

$$M_{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}} \cong M_{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 174 \end{pmatrix}} \cong M_{(1)} \oplus M_{(1)} \oplus M_{(174)}$$

$$0 \cong 0 \oplus 0 \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{174\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}$$