אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 10

8 בינואר 2020

תזכורת: יהיו $(X,\mathcal{S},u)$ ו־$(Y,\mathcal{T},v)$ מרחבי מידה חיובית. נרצה להגדיר מידה על מרחב המכפלה $X\times Y$. תחילה, לכל זוג קבוצות $E\subseteq X$ מדידה־$\mathcal{S}$ ו־$F\subseteq Y$ מדידה־$\mathcal{T}$ נגדיר את נפח המלבן $R=E\times F$ להיות $|R|=u\left(E\right)*v\left(F\right)$.
כעת נוכל להגדיר מידה חיצונית w^* לכל קבוצה A במרחב המכפלה לפי

$$w^*\left(A\right)=\inf_{A\subseteq\bigcup_n R_n}\sum_n|R_n|$$

נאמר שקבוצה $A\subseteq X\times Y$ היא מדידה במרחב המכפלה אם לכל $S\subseteq X\times Y$ מתקיים

$$w^*\left(S\right)=w^*\left(S\cap A\right)+w^*\left(S\cap A^c\right)$$

נוכל לצמצם את המידה החיצונית w^* לאוסף הקבוצות המדידות, שנסמנו $\mathcal{U}$, וכך לקבל מידה w. בנינו את מרחב המידה $(X\times Y,\mathcal{U},w)$.

הגדרה: מידה μ נקראת שלמה אם לכל $E\subseteq A$ כך ש־$\mu\left(E\right)=0$, A מדידה (ולכן גם $\mu\left(A\right)=0$).

דוגמה: מידת לבג m היא מידה שלמה.

משפט (פוביני): יהיו $(X,\mathcal{S},u)$ ו־$(Y,\mathcal{T},v)$ מרחבי מידה חיובית, כאשר u,v מידות שלמות. אז לכל פונקציה $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית במרחב המכפלה מתקיים

$$\int_X\left(\int_Y fdv\right)du=\iint_{X\times Y}fdw=\int_Y\left(\int_X fdu\right)dv$$

הגדרה: מידה μ מעל X נקראת σ־סופית אם קיים אוסף בן־מניה E_n של קבוצות מדידות כך ש־$X=\bigcup_n E_n$, ולכל n, $\mu\left(E_n\right)<\infty$.

דוגמה: מידת לבג m היא σ־סופית מעל $\mathbb{R}$, כי אפשר לכתוב $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1]$ ומתקיים $m\left([n,n+1]\right)=1<\infty$.

משפט (טונלי): יהיו $(X,\mathcal{S},u)$ ו־$(Y,\mathcal{T},v)$ מרחבי מידה חיובית, כאשר u,v מידות שלמות ו־σ־סופיות. אז לכל פונקציה $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ מדידה ואי־שלילית במרחב המכפלה מתקיים

$$\int_X\left(\int_Y fdv\right)du=\iint_{X\times Y}fdw=\int_Y\left(\int_X fdu\right)dv$$

תרגיל: נתבונן במרחבי המידה $(X=[0,1],\mathcal{L}[0,1],m)$, $(Y=[0,1],\mathcal{P}[0,1],\#)$, כאשר $\#$ היא מידת הספירה. נסמן את מידת המכפלה ב־w, ונגדיר את האלכסון $D=\{(x,y)\mid x,y\in[0,1],\,x=y\}$.

1. הוכיחו כי D מדיד במרחב המכפלה.
2. הראו כי $\int_X\left(\int_Y\mathbb{1}_Dd\#\right)dm\neq\iint_{X\times Y}\mathbb{1}_Ddw\neq\int_Y\left(\int_X\mathbb{1}_Ddm\right)d\#$.

פתרון: לכל n טבעי ולכל $1\leq k\leq 2^n$ נגדיר קטעים $I_{n,k}=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$. במרחב המכפלה נגדיר לכל n את $B_n=\bigcup_{k=1}^{2^n}I_{n,k}\times I_{n,k}$. אם כן, B_n היא קבוצת R_σ (כלומר איחוד בן־מניה של מלבנים מדידים). נשים לב כי $D=\bigcap_n B_n$, ולכן היא קבוצת $R_{\sigma\delta}$, ולכן מדידה.
נרצה לחשב את המידה שלה במרחב המכפלה, $w(D)$. (הערה - אמנם יש לנו טענה על מידת חיתוך בן־מניה של קבוצות, אבל כאן המידה לא סופית ולכן לא נוכל להשתמש בה).
נוכל לעשות זאת על ידי חישוב המידה החיצונית $w^*(D)$. נרצה להראות שהמידה של D אינסופית. אם כן, יהי $\{R_n=E_n\times F_n\}$ כיסוי של D על ידי מלבנים מדידים. נתבונן בתת־הכיסוי $\{E_n\times F_n\mid m(E_n)>0\}$, המכסה תת־קבוצה לא בת־מניה $D'\subseteq D$. (קבוצת ה־x־ים שהורדנו היא ממידת לבג 0, ולכן נותרנו עם אוסף ממידת לבג חיובית, לכן לא בן־מניה).
כעת קבוצת שיעורי ה־y ב־D' גם היא לא בת־מניה, ולכן קיים מלבן $R_{n_0}=E_{n_0}\times F_{n_0}$ עבורו $\#(F_{n_0})=\infty$ וכן $m(E_{n_0})>0$. אז $|R_{n_0}|=m(E_{n_0})*\#(F_{n_0})=\infty$. לכן גם $\sum_n|R_n|\geq|R_{n_0}|=\infty$. אם ניקח אינפימום על כל הכיסויים של D עדיין נקבל ∞, ולכן $w(D)=w^*(D)=\infty$.
למעשה חישבנו את

$$\iint_{X\times Y}\mathbb{1}_Ddw=w(D)=\infty$$

נחשב את האינטגרלים הנותרים. לכל $y\in[0,1]$ קבוע, $\mathbb{1}_D=0$ כמעט בכל מקום (כמעט לכל x) ולכן $\int_X\mathbb{1}_Ddm=0$. אז

$$\int_Y\left(\int_X\mathbb{1}_Ddm\right)d\#=\int_Y 0d\#=0$$

לכל $x\in[0,1]$ קבוע,

$$\int_Y\mathbb{1}_Dd\#=\int_{\{x\}}\mathbb{1}_Dd\#+\int_{[0,1]\setminus\{x\}}\mathbb{1}_Dd\#$$

$$=\int_{\{x\}}\mathbb{1}_Dd\#+0=\#(\{x\})=1$$

לכן

$$\int_X\left(\int_Y\mathbb{1}_Dd\#\right)dm=\int_X 1dm=m([0,1])=1$$

סך הכל ראינו כי משפט טונלי לא תקף כאן. זה בגלל שמידת הספירה על קבוצה לא בת־מניה היא לא σ־סופית.

תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dm\left(x\right)=\int_{0}^{\infty}m\left(\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\} \right)dm\left(t\right)$$

פתרון: אפשר לראות כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dm\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\left|f\left(x\right)\right|}1dm\left(t\right)\right)dm\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\mathbb{1}_{\left\{ \left(x,t\right)\,|\,0\leq t\leq\left|f\left(x\right)\right|\right\} }dm\left(t\right)\right)dm\left(x\right)$$

ממשפט טונלי,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\mathbb{1}_{\left\{ \left(x,t\right)\,|\,0\leq t\leq\left|f\left(x\right)\right|\right\} }dm\left(t\right)\right)dm\left(x\right)=\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{\left\{ \left(x,t\right)\,|\,0\leq t\leq\left|f\left(x\right)\right|\right\} }dm\left(x\right)\right)dm\left(t\right)$$

$$=\int_{0}^{\infty}m\left(\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\} \right)dm\left(t\right)$$

יש להצדיק את תנאי המשפט. מידות לבג $m\left(x\right),m\left(t\right)$ הן שלמות ו־σ־סופיות. נותר להראות כי $\mathbb{1}_{\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\} }$ מדידה במרחב המכפלה, כלומר שהקבוצה $\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\}$ מדידה שם. ובכן, יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. הפונקציה $\left|f\right|$ מדידה לבג (כי f מדידה לבג), לכן הקבוצה $E_{\alpha}=\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|>\alpha\right\}$ מדידה לבג. אז הקבוצה $E_{\alpha}\times\mathbb{R}=\left\{ \left(x,t\right)\,|\,\left|f\left(x\right)\right|>\alpha\right\}$ היא מלבן מדיד במרחב המכפלה, ולכן הפונקציה $\left(x,t\right)\mapsto\left|f\left(x\right)\right|$ מדידה במרחב המכפלה. כמו־כן, הקבוצה $F_{\alpha}=\left\{ t\,|\,t>\alpha\right\}$ מדידה לבג, ולכן $\mathbb{R}\times F_{\alpha}=\left\{ \left(x,t\right)\,|\,t>\alpha\right\}$ היא מלבן מדיד במרחב המכפלה, כלומר הפונקציה $\left(x,t\right)\mapsto t$ מדידה שם.
הפרש של פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן הפונקציה $\left(x,t\right)\mapsto\left|f\left(x\right)\right|-t$ מדידה. נשים לב כי

$$\left\{ x\,|\,\left|f\left(x\right)\right|\geq t\right\} =\left(\left|f\left(x\right)\right|-t\right)^{-1}\left(\left[0,\infty\right]\right)$$

ולכן זו קבוצה מדידה במרחב המכפלה.