# מכפלת מחרוזות בינריות

<u>קלט:</u> נתונות 2 מחרוזות בעלות $n$ ביטים, $x$ ו$y$.

<u>פלט:</u> $x \cdot y$(כאשר כל מחרוזת היא בעצם מספר בינארי בעל $n$ ספרות)

<u>מדד:</u> מספר הפעולות האריתמטיות($+,-,*,/$).

## פתרון 1

כופלים כל ביט ב$y$ בכל ביט $x$, מזיחים לפי המיקום של הביט, ומחברים. $n^2$ כפלים+$n^2$ חיבורים - $\theta\left(n^2\right)$פעולות אריתמטיות.

## הפרד ומשול

נחלק את $x$ ו$y$ לשני חלקים, נכפול רקורסיבית כל חלק של $x$ בכל חלק של $y$, נזיח את התוצאות ונחבר:

$$x = x_1 2^{\frac{n}{2}} + x_2$$

$$y = y_1 2^{\frac{n}{2}} + y_2$$

$$x \cdot y = \left(x_1 2^{\frac{n}{2}} + x_2\right)\left(y_1 2^{\frac{n}{2}} + y_2\right) = x_1 y_1 2^n + x_1 y_2 2^{\frac{n}{2}} + x_2 y_1 2^{\frac{n}{2}} + x_2 y_2$$

$T\left(n\right)$ - מס' הפעולות האריתמטיות הדרושות לחישוב $x \cdot y$ עם האלגוריתם הנ"ל עבור $x$ ו$y$ באורך $n$.

$$T\left(n\right) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + cn & n > 1 \end{cases}$$

$$T\left(n\right) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn = 4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + c\frac{n}{2}\right) + cn = 4^2 T\left(\frac{n}{4}\right) + 2cn + cn$$

$$= 4^2\left(4T\left(\frac{n}{8}\right) + c\frac{n}{4}\right) + 2cn + cn = 4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + cn\left(4 + 2 + 1\right) =$$

$$... = 4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + cn\sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

עבור $\frac{n}{2^i}=1$ נקבל $T(1)$ בנוסחה ונוכל לפתור $i=\log n \Leftrightarrow n=2^i \Leftrightarrow \frac{n}{2^i}=1$

$$T(n)=4^{\log n}\cdot 1+cn\sum_{j=0}^{\log n-1}2^j=\theta\left(n^2\right)$$

אפילו שהשתמשנו שביטת הפרד ומשול, לא ירדנו בסיבוכיות.

## ננסה להקטין את הקבוע שבו מכפילים את החלק הרקורסיבי - לרדת מ4 ל3

$$A=x_1y_1$$

$$B=x_2y_2$$

$$C=(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

נשים לב שבשביל $C$ אנו צריכים לעשות פעולת כפל אחת ושתי פעולות חיבור. את פעולות החיבור אפשר לעשות בזמן לינארי.

$$C=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$$

$$C-A-B=x_1y_2+x_2y_1$$

$$xy=A2^n+2^{\frac{n}{2}}(C-A-B)+B$$

עכשיו במקום 4 כפלים אנו עושים 3, אבל שילמנו בחיבורים.

$$T(n)=3T\left(\frac{n}{2}\right)+cn=3\left(3T\left(\frac{n}{4}\right)+\frac{cn}{2}\right)+cn=3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+cn\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+c\frac{n}{2^2}\right)+cn\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+cn\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1\right)=3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right)+cn\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{3}{2}\right)^j$$

רוצים $\frac{n}{2^i}=1 \Leftrightarrow i=\log n$

$$T(n)=3^{\log n}\cdot 1+cn\sum_{j=0}^{\log n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^j=3^{\log n}+cn\cdot 2\left(\frac{3^{\log n}}{n}-1\right)=\theta\left(3^{\log n}\right)$$

# מכפלת מטריצות

<u>קלט:</u> מטריצות $A$ ו$B$ מגודל $n \times n$ כל אחת.

<u>פלט:</u> $A \cdot B$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}^{C}$$

### חישוב ישיר

<u>מס' הפעולות האריתמטיות הדרושות:</u> $\theta\left(n^3\right)$. לכל ערך ב$C$ צריך לחשב $\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$

### הפרד ומשול

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a & | & b \\ - & + & - \\ c & | & d \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} e & | & f \\ - & + & - \\ g & | & h \end{pmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} r & | & s \\ - & + & - \\ t & | & u \end{pmatrix}}^{C}$$

$$r = ae + bg$$

$$s = af + bh$$

$$t = ce + dg$$

$$u = cf + dh$$

$T\left(n\right)$ - מספר הפעולות להכפלת מטריצות $n \times n$

$$T\left(n\right) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8T\left(\dfrac{n}{2}\right) + cn^2 & n > 1 \end{cases}$$

$$T\left(n\right) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2 = \theta\left(8^{\log n}\right) = \theta\left(n^3\right)$$

לא שיפרנו את הסיבוכיות.

### שיטת שטרסן

שוב, ננסה לשפר את המקדם של $T\left(\frac{n}{2}\right)$ בנוסחה הרקורסיבית. ניתן לחשב את המטריצה באמצעות 7 מכפלות:

$$p_1 = a\left(f-h\right)$$

$$p_2 = \left(a+b\right)h$$

$$p_3 = \left(c+d\right)e$$

$$p_4 = d\left(g-e\right)$$

$$p_5 = \left(a+d\right)\left(e+h\right)$$

$$p_6 = \left(b-d\right)\left(g+h\right)$$

$$p_7 = \left(a-c\right)\left(e+f\right)$$

$$r = p_5+p_4-p_2+p_6 = ae+ah+de+dh+dg-de-ah-bh+bg+bh-dg-dh = ae+bg$$

וכך גם לגבי $s$, $t$ ו־$u$ - ניתן לשחזר את הנוסחה באמצעות 7 כפלים. מקבלים שהסיבוכיות היא

$$T\left(n\right) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2 = \theta\left(7^{\log n}\right) = \theta\left(n^{\log 7}\right) = \theta\left(n^{2.8}\right)$$

# מיון מהיר QuickSort

כל פעם תוקעים "יתד", וממיינים רקורסיבית את מה שקטן ממנו ואת מה שגדול ממנו.

$$T\left(n\right) = \begin{cases} 0 & n=1 \\ T\left(n-1\right)+n & n>1 \end{cases}$$

במקרה הגרוע $o\left(n^2\right)$.

במקרה הטוב $o\left(n\log n\right)$.

הסיבוכיות תלויה ביתד שמוצאים כל פעם. אנחנו לא יכולים להסתמך על כך שהקלט יהיה מפוזר בצורה טובה, ולכן נבחר אותו באקראי:

$X$ משתנה מקרה. - התוחלת היא $E\left(X\right)=\sum_i X_i p_i$

$T\left(n\right)$ מס' ההשוואות שמיון מהיר מבצע על קלט באורך $n$

$E\left(T\left(n\right)\right)$

אם הpivot אחרי המיון במקום ה$i$ אז הזמן למיון יהיה $T\left(i-1\right)+T\left(n-1\right)$.

$$E\left(T\left(n\right)\right) = \left(n+1\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(T\left(i-1\right)+T\left(n-i\right)\right)$$

$$\tilde{T}\left(n\right)=E\left(T\left(n\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[T\left(i-1\right)+T\left(n-i\right)\right]+\left(n+1\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T\left(i-1\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T\left(n-i\right)+\left(n+1\right)$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}T\left(i-1\right)+\left(n+1\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T\left(i\right)+\left(n+1\right)$$

$$n\tilde{T}\left(n\right)=2\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{T}\left(i\right)+n\left(n+1\right)$$

$$\left(n-1\right)T\left(n-1\right)=2\sum_{i=0}^{n-2}T\left(i\right)+\left(n-1\right)n$$

$$nT\left(n\right)-\left(n-1\right)T\left(n-1\right)=2T\left(n-1\right)+n\underbrace{\left(n+1-n+1\right)}_{2}$$

$$nT\left(n\right)=\left(n+1\right)T\left(n-1\right)+2n$$

נחלק ב$n\left(n+1\right)$:

$$\frac{T\left(n\right)}{n+1}=\frac{T\left(n-1\right)}{n}+\frac{2}{n+1}$$

נסמן $G\left(n\right)=\frac{T\left(n\right)}{n+1}$(תנאי עצירה שלו כמו של $T$: $G\left(1\right)=\frac{T\left(1\right)}{2}=0$):

$$G\left(n\right)=G\left(n-1\right)+\frac{2}{n+1}=G\left(n-2\right)+\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}=...=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}+...+\frac{2}{3}+G\left(1\right)$$

$$G\left(n\right)=2\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}\approx 2\int_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}=\theta\left(\log n\right)$$

$$\int_a^{b+1}\frac{di}{i} \le \sum_{i=a}^{b}\frac{di}{i} \le \int_{a-1}^{b}\frac{di}{i}$$

אבל זו הסיבוכיות של $G$, לא של $T$, ולכן הסיבוכיות **בתוחלת** היא $\theta\left(n\log n\right)$