אוטומט מחסנית

תרגיל

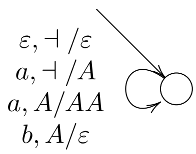
בנו אוטומט המקבל את

$$L = \left\{ w \middle| \begin{array}{c} \#_a(w) = \#_b(w) \\ \forall_{xy=w} \#_a(x) \geq \#_b(x) \end{array} \right\}$$

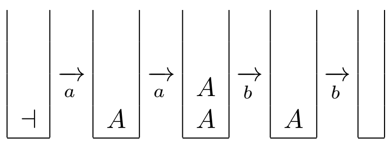
ע"י מצב אחד בלבד.

פתרון

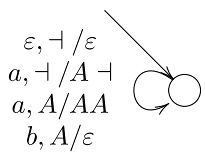
לכאורה, נראה שצריך לעשות את זה באמצעות אוטומט שמקבל בריקון מחסנית ־ אבל ניתן לפתור את זה גם בשיטת המצבים המקבלים, שכן אפשר לתקוע את האוטומט אם מרוקנים לגמרי את המחסנית, או "נופלים" מהמצב(אוטומט לא דטרמיניסטי).



דוגמת הרצה: עבור $aabb \in L$:



אבל הפתרון הזה לא טוב, שכן הוא "דופק" את המחסנית כשהוא מסיר את תו הפתיחה. לכן נשנה אותו:



הקשר בין שיטת ריקון לשיטת מצבים מקבלים

טענה

שיטת ריקון $\subseteq$ שיטת מצבים מקבלים.

הוכחה

נרצה להפוך אוטומט בשיטת מצבים מקבלים לאוטומט בשיטת ריקון.
נוסיף מצב q_E(ריקון) ומעברים הבאים:
לכל $q \in F, \gamma \in \Gamma$

$$\delta\left(q,\varepsilon,\gamma\right)=\left(q_E,\gamma\right)$$

$$\delta\left(q_E,\varepsilon,\gamma\right)=\left(q_E,\varepsilon\right)$$

טענה

שיטת ריקון $\supseteq$ שיאת מצבים מקבלים.

הוכחה

נרצה להפוך אוטומט בשיטת ריקון לאוטומט בשיטת מצבים מקבלים.
נוסיף מצב מקבל q_F.
נוסיף תו פתיחה חדש # לΓ(א"ב מחסנית)
נאתחל במחסנית עם # ונוסיף מעליו $\dashv$
ובכל מצב q נגדיר

$$\delta\left(q,\varepsilon,\#\right)=\left(q_F,\#\right)$$

שאלה

תנו אוטומט מחסנית לL

$$L=\left\{w|w\notin\left(a^nb\right)^n\right\}$$

פתרון

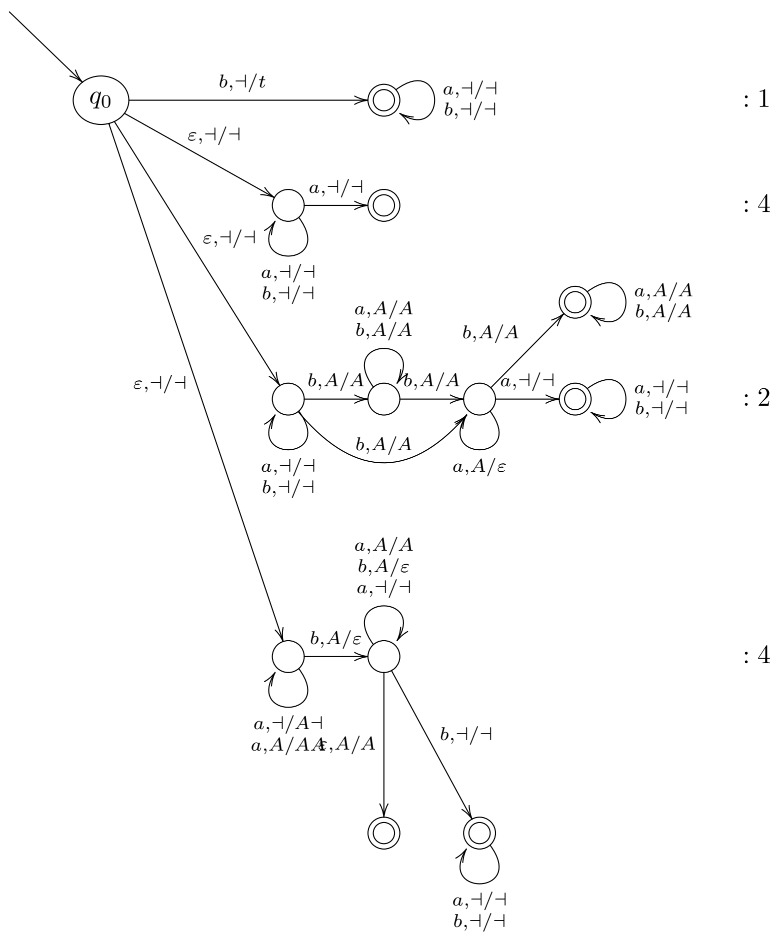
מהי השפה? אילו מילים לא בשפה:

$$\underbrace{a^nba^nb\cdots a^nb}_{n\text{ times}}$$

כלומר בשפה נמצאות מילים מהצורה:

1. מתחילות בb
2. מילים מהצורה $a^nba^{m_1}ba^{m_2}b\cdots$ כך שקיים $m_i \neq n$
3. $(a^nb)^m$, $n \neq m$
4. מסתיימת בa

נבנה אוטומט מחסנית בשיטת מצבים מקבלים:



אוטומט מחסנית דטרמיניסטי

הגדרה

אוטומט מחסנית דטרמיניסטי מקיים את התנאים הבאים:

1. לכל $q \in Q$, $\gamma \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
   מתקיים $|\delta(q, a, \gamma)| \leq 1$
2. לכל $q \in Q$, $\gamma \in \Gamma$
   אם $\delta(q, \varepsilon, \gamma) \neq \emptyset$ אז לכל $\sigma \in \Sigma$ $\delta(q, \sigma, \gamma) = \emptyset$

בפשטות, האוטומט דטרמיניסטי אם בכל סיטואציה יש המשך **יחיד** לכל היותר.

שקילויות

- אוטומט סופי $\Leftrightarrow$ דקדוק רגולרי $\Leftrightarrow$ ביטוי רגולרי
- אוטומט מחסנית בשיטת ריקון $\Leftrightarrow$ שיטת מצבים מקבלים
- אוטומט מחסנית $\Leftrightarrow$ דקדוק חסר הקשר

שפות חופשיות(חסרות) הקשר

למת הניפוח לשפות חופשיות הקשר

קיים n, כך שלכל $z \in L$, $|z| \geq n$, קיים פרוק $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $1 \leq |vx|$ כך שלכל $i \in \mathbb{N}_0$

$$z' = u(v)^i w(x)^i y \in L$$

שאלה

הוכח $a^n b^n c^n$ לא חופשית הקשר.

פתרון

נוכיח ע"י למת הניפוח.

נניח בשלילה שL חופשית הקשר.

יהי n, נבחר $z = a^n b^n c^n$.

יהי פירוק

$$z = uvwxy \qquad |vwx| \leq n \qquad |vx| \geq 1$$

$|(v)\, w\, (x)| \leq n$, אי לך הפירוק מקיים אחת מהאופציות הבאות:

1. $vx = a^t$
2. $vx = b^t$
3. $vx = c^t$
4. $vx = a^t b^s$
5. $vx = b^t c^s$

לכל פירוק נראה סתירה:

1. נבחר $i = 0$, ונקבל $z' = a^{n-t} b^n c^n$
$z' \in L \Leftarrow n - t \neq n \Leftarrow 1 \leq t = |vx|$
2. אותו דבר כמו 1
3. אותו דבר כמו 1
4. נבחר $i = 2$ ונקבל

$$z' = uv^2wx^2y = uvvwxxy = a^{n-t} a^t a^t b^{n-s} b^s b^s c^n$$

זה לא נכון! כי אנחנו לא יודעים ש$v \in a^*, x \in b^*$ - יכול להיות $v \in a^* b^*$ או $x \in a^* b^*$.

לכן, נבחר $i = 2$ ונקבל עבור z'

$$\#_a(z') = n + t \qquad \#_b(z') = n + s \qquad \#_c(z') = n$$

$$1 \leq s + t$$

$\Leftarrow$ $n \neq n + T$ __או__ $n \neq n + s \Leftarrow z' \notin L$.

5. אותו דבר כמו 4.

$\Leftarrow$ סתירה, L לא חופשית הקשר.

אינטואיציה מתי שפה לא חופשית הקשר

א. ספירה מרובה - ספירה כפולה או יותר מכך_למשל $a^n b^n c^n$.\

ב. קיום נוסחה - למשל a^p כאשר p ראשוני, או $a^{n!}$.

דוגמה

הוכח/הפרך L אינה חופשית הקשר

פתרון

נניח בשלילה L חופשית הקשר ע"י למה. יהי n. נבחר $z = a^{n^2}$

$$z = uvwxy$$

$$z = a^{k_1}a^{k_2}a^{k_3}a^{k_4}a^{n^2-k_1-k_2-k_3-k_4}$$

$$k_2 + k_3 + k_4 \leq n$$

$$k_2 + k_4 \geq 1$$

נבחר $i = 2$ ונקבל $z' = a^{n^2+k_2+k_4}$. נראה שלא קיים k כך ש$k^2 + k_2 + k_4$

$$n^2 < n^2 + k_2 + k_4 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$