A משולשית ונורמלית $\Leftarrow$ A אלכסונית:

$A=(a_{ij})$ משולשית עליונה ונורמלית

$$\Downarrow$$

$A^*=(\overline{a_{ji}})$ משולשית תחתונה.

$$A^*A=AA^*$$

נשווה בין איברי האלכסון בשני הצדדים:

$$\forall i \quad \sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}\,a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\overline{a_{ik}}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{|a_{ii}|^2}+\sum_{k\neq i}|a_{ki}|^2=\cancel{|a_{ii}|^2}+\sum_{k\neq i}|a_{ik}|^2$$

אבל $a_{ij}=0 \quad \forall i>j$, לכן:

$$\sum_{k=1}^{i-1}|a_{ki}|^2=\sum_{k=i+1}^{n}|a_{ik}|^2$$

ברכיב ה- n,n זה אומר:

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k,n}|^2=0 \Rightarrow \forall k\neq n \quad a_{k,n}=0$$ (איפסנו את העמ' ה- n)

אבל, ברכיב ה- $n-1,n-1$ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n-2}|a_{k,n-1}|^2=\underbrace{|a_{n-1,n}|}_{=0}=0 \Rightarrow \forall k\neq n-1 \quad a_{k,n-1}=0$$

עפ"י שלב קודם

(איפסנו את העמ' ה- $n-1$)

באותו אופן ניתן להמשיך.

העמודה ה- j תתאפס ע"י אינדוקציה:

כלומר, באינדוקציה הרכיב ה-n יהווה בסיס

ונניח לכל $i=n,n-1,\dots,j+1$

$$a_{ki}=0 \quad \forall k\neq i$$

אז ברכיב ה-j,j:

$$\sum_{k=1}^{j-1}|a_{k,j}|^2 = \underbrace{\sum_{k=j+1}^{n}|a_{jk}|^2}_{\boxed{=0 \ \text{לפי הנחת האינדוקציה.}}} \Rightarrow \forall k\neq j \quad a_{kj}=0$$

(אפסס את העמודה ה-j)

סה"כ נקבל $\quad a_{ij}=0 \quad \forall i\neq j$

$\Leftarrow A$ אלכסונית.