

## תרגיל 7, בדידה 2 להנדסה תשעח

1. יהי גרף  $G = (V, E)$ , הוכיחו או הפריכו:

א. אם יש קודקוד  $v \in V$  עם  $\deg(v) = 0$  אז  $\lambda = 0$  ערך עצמי של  $A_G$ .

ב. אם  $\lambda = 0$  ערך עצמי של  $A_G$  אז יש  $v \in V$  כך ש  $\deg(v) = 0$ .

הערה: קודקוד מדרגה 0 נקרא מבודד.

פתרון:

א. הוכחה: נקבל שהשורה המתאימה לקודקוד  $v$  במטריצה היא שורת אפסים, ולכן 0 ערך עצמי.

ב. הפרכה: ניקח גרף דו-צדדי מלא  $K_{2,2} = (V \cup U, E)$  כלומר,  $|V| = 2, |U| = 2$ , ולכל  $v \in V, u \in U$  מתקיים  $\{v, u\} \in E$ . אין בגרף קודקוד מבודד. נקבל את

המטריצה 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, שכמוכן לא הפיכה ולכן 0 ערך עצמי.

2. יהי  $T_n$  עץ עם  $n$  קודקודים, ויהי  $x \in T_n$  עלה בעץ. הוכיחו ש  $T_n \setminus \{x\}$  גם עץ.

פתרון:

נסמן את הגרף החדש ב- $T'$ . צריך להוכיח שהגרף המתקבל קשיר וחסר מעגלים.

קשיר: יהיו  $u, v \in T'$  כיון ש- $x$  עלה, מסלול פשוט שעובר דרך  $x$  מסתיים שם.

כעת,  $T_n$  עץ, ולכן קשיר ולכן קיים מסלול פשוט  $uv$ , וכאמור מסלול זה לא עובר

דרך  $x$  (כי אז היה צריך להסתיים ב- $x$ , אבל  $v \neq x$ ), ולכן המסלול הזה נמצא גם

ב- $T'$ .

חסר מעגלים: נניח שיש מעגל  $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  ב- $T'$ . כל הצעות שייכות גם ל- $T_n$ , ולכן קיבלנו מעגל ב- $T_n$  בסתירה לכך שהוא עץ.

3. יהי  $n \geq 4$ . מצאו גרף  $G = (V, E)$  עם  $n$  קודקודים כך שיש בו מסלול אוילר, אין בו מעגל אוילר, ולכל  $v, u \in V$ , בגרף  $G' = (V, E \cup \{\{v, u\}\})$  אין מעגל אוילר.  
פתרון:

ניקח מעגל פשוט עם  $n-1$  קודקודים, ועוד קודקוד אחד, נסמנו  $v$  שיש צלע בינו לבין אחד מקודקודי המעגל שסומן  $u$ . יש מסלול אוילר, למשל להתחיל עם הקודקוד שלא על המעגל,  $v$ , ואז המעגל. אין מעגל אוילר, כי כדי שיהיה מעגל אוילר צריך שדרגת כל הקודקודים תהיה זוגית, ולכן צריך להוסיף קשת בין  $v$  ל- $u$ , אבל היא כבר קיימת!

4. הוכיחו: בגרף דו"צ  $G = (V \cup U, E)$  עם מספר אי-זוגי של צלעות אין מעגל אוילר.  
פתרון:

כל צלע היא מ- $V$  ל- $U$ . נניח בשלילה שיש מגל אוילר, ונניח בה"כ שהוא מתחיל מאיזשהו קודקוד  $v \in V$ . הצעד הראשון יהיה ללכת לשכן שלו מ- $U$ , השני לחזור ל- $V$  וכו'. לכן תמיד בצעד אי-זוגי מגיעים ל- $U$ . כיון שיש מס' אי-זוגי של צלעות, יש מס' אי-זוגי של צעדים במעגל (עוברים על כל צלע בדיוק פעם אחת, זה אותו מספר). לכן נסיים את המעגל בקודקוד של  $U$ , בסתירה לכך שחוזרים למקום שבו התחלנו, שהיה ב- $V$ .

בהצלחה!