טענה: יהי $(\mathbb{R}, S, m)$ מרחב מידת לבג. הוכיחו כי $A \in S$ אממ לכל n קיימות $F_n \subset \mathbb{R}$ סגורות ו $E_n \subset \mathbb{R}$ פתוחות כך ש

$$F_n \subset A \subset E_n$$

ו $m(E_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$.

פתרון: $\Leftarrow$: נניח כי $A \in S$, נוכיח את הטענה ל A חסומה. ראינו כבר בתרגיל בית כי במצב זה קיימות E_n פתוחות כך ש

$$m^*(A) > m(E_n) - \frac{1}{2n}$$

מכיוון ש A מדידה נובע כי $m(A) > m(E_n) - \frac{1}{2n}$. כעת נניח כי A איננה חסומה. אז נגדיר $A_k = A \cap [k, k+1)$ ונשים לב כי $A = \cup A_k$. עבור A_k נמצא קבוצה $E_{n,k}$ פתוחה כך ש

$$m(A_k) > m(E_{n,k}) - \frac{2^{-|k|}}{4n}$$

ומכאן שאם נגדיר את $E_n = \cup_k E_{n,k}$ נקבל כי

$$m(E_n \backslash A) < \frac{1}{2n}$$

עכשיו נמצא את F_n המקיימות את הטענה. עבור A כללית, נסתכל על A^c ונמצא עבורו G_n פתוחות כך

$$m(G_n \backslash A^c) < \frac{1}{2n}$$

עכשיו נשים לב כי אם נגדיר את $F_n = G_n^c$ נקבל כי

$$m(A \backslash F_n) = m(G_n \backslash A^c) < \frac{1}{2n}$$

מכאן נובע כי

$$m(E_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$: נגדיר את $B = \cap_n E_n$, אזי $A \subset B$ וגם $m(B \backslash A) = 0$. מכאן ש $C = B \backslash A$ מדידה ולכן $A = B \backslash C$ מדידה.