חשבון אינפי 1
תרגיל 1 - פתרון

.1

א. $\left|x^2-5x\right|>\left|x^2\right|-\left|5x\right|$

פתרון :

$$\left|x^2-5x\right|>\left|x^2\right|-\left|5x\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x>x^2+5x \\ x\le 0 \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} -x^2+5x>x^2-5x \\ 0<x<5 \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} x^2-5x>x^2-5x \\ x\ge 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x>0 \\ x\le 0 \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} -2x^2+10x>0 \\ 0<x<5 \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} 0>0 \\ x\ge 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x<0 \text{ או } 0<x<5$$

תשובה סופית: $0<x<5$ או $x<0$

ב. הוכיחו $\left|4x-1\right|+\left|2x+1\right|<\left|6x\right|$

פתרון :

$$\left|4x-1\right|+\left|2x+1\right|<\left|6x\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+1-2x-1<-6x \\ x\le -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} -4x+1+2x+1<-6x \\ -\frac{1}{2}<x<0 \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} -4x+1+2x+1<6x \\ 0\le x<\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{או } \begin{cases} 4x-1+2x+1<6x \\ x\ge \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<0 \\ x \le -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow x \in \varnothing)$$

$$\text{או} \begin{cases} 4x<-2 \\ -\frac{1}{2}<x<0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow x \in \varnothing)$$

$$\text{או} \begin{cases} -8x<-2 \\ 0 \le x<\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow x \in \varnothing)$$

$$\text{או} \begin{cases} 0<0 \\ x \ge \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow x \in \varnothing)$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing$$

תשובה סופית: אין פתרון

ג. $\left|x^2-4x-3\right|+\left|x-1\right|+\left|x-2\right|>2x$

פתרון:

$$x^2-4x-3=0 \quad x-1=0 \quad x-2=0$$
$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{7} \quad x=1 \quad x=2$$

ולכן נחלק ל-5 מקרים:

$$\begin{cases} x \le 2-\sqrt{7} \\ x^2-4x-3-x+1-x+2>2x \end{cases} \Leftrightarrow x \le 2-\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} 2-\sqrt{7}<x \le 1 \\ -x^2+4x+3-x+1-x+2>2x \end{cases} \Leftrightarrow 2-\sqrt{7}<x \le 1$$

$$\begin{cases} 1<x \le 2 \\ -x^2+4x+3+x-1-x+2>2x \end{cases} \Leftrightarrow 1<x \le 2$$

$$\begin{cases} 2<x \le 2+\sqrt{7} \\ -x^2+4x+3+x-1+x-2>2x \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<4$$

$$\begin{cases} x>2+\sqrt{7} \\ x^2-4x-3+x-1+x-2>2x \end{cases} \Leftrightarrow x>2+\sqrt{10}$$

נעשה איחוד של כל התוצאות ונקבל: $x<4 \quad \text{or} \quad x>2+\sqrt{10}$

ד. $\left|x^2-24\right|^{x^2+3x+1}<\frac{1}{\left|x^2-24\right|^2}$

פתרון:

$$\left|x^2-24\right|^{x^2+3x+1}<\frac{1}{\left|x^2-24\right|^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-24\right|^{x^2+3x+3}<1\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-24\right|<1\\ x^2+3x+3>0\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}\quad\text{or}\quad\begin{cases}\left|x^2-24\right|>1\\ x^2+3x+3<0\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$x^2+3x+3>0$ **לכל** $x\in\mathbb{R}$ **ולכן**

$$\left|x^2-24\right|^{x^2+3x+1}<\frac{1}{\left|x^2-24\right|^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-24\right|<1\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x^2-24<1\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-24>-1\\ x^2-24<1\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-23>0\\ x^2-25<0\\ x\neq\pm\sqrt{24}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad -5<x<-\sqrt{24}\quad\text{or}\quad -\sqrt{24}<x<-\sqrt{23}\quad\text{or}\quad \sqrt{23}<x<\sqrt{24}\quad\text{or}\quad \sqrt{24}<x<5$$

תשובה סופית:

$$-5<x<-\sqrt{24}\quad\text{or}\quad -\sqrt{24}<x<-\sqrt{23}\quad\text{or}\quad \sqrt{23}<x<\sqrt{24}\quad\text{or}\quad \sqrt{24}<x<5$$

2. הוכיחו :

א. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(1+2+\ldots+n\right)^2$ לכל $n\in\mathbb{N}$

הוכחה :

נוכיח באינדוקציה על n

(1 $n=1$ מתקיים $1^3=1^2$.

2) הנחת האינדוקציה $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

3) נוכיח : $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\ldots+n+n+1)^2$

$$(1+2+\ldots+n+n+1)^2=(1+2+\ldots+n)^2+2(1+2+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2$$

$$=\underbrace{1^3+2^3+\ldots+n^3}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה}}+2\cdot\underbrace{\frac{1+n}{2}\cdot n}_{\text{סכום של } n \text{ איברים של סדרה חשבונית}}\cdot(n+1)+(n+1)^2$$

$$=1^3+2^3+\ldots+n^3+n(1+n)^2+(n+1)^2=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^2(n+1)$$

$$=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

ב. לכל n טבעי , הביטוי $10^{3n+1}+(-1)^n\cdot 3$ מתחלק ב-13 ללא שארית

הוכחה :

1) $n=1$ $\quad 10^4-3=9997=13\cdot 769$ ולכן מתחלק ב- 13 .

2) נניח ש- $10^{3n+1}+(-1)^n\cdot 3$ מתחלק ב- 13.

3) נוכיח ש- $10^{3(n+1)+1}+(-1)^{(n+1)}\cdot 3$ מתחלק ב- 13

$$10^{3(n+1)+1}+(-1)^{(n+1)}\cdot 3$$

$$=10^{3n+1}\cdot 10^3+(-1)^{n+1}\cdot 3$$

$$=10^{3n+1}\cdot 10^3+(-1)^n\cdot 3\cdot 10^3-(-1)^n\cdot 3\cdot 10^3+(-1)^{n+1}\cdot 3$$

$$=10^3\underbrace{\left(10^{3n+1}+(-1)^n\cdot 3\right)}_{\text{מתחלק ב- 13 לפי הנחת האינדוקציה}}-(-1)^n\cdot 3\left(10^3+1\right)$$

$$=10^3\cdot\left(10^{3n+1}+(-1)^n\cdot 3\right)-(-1)^n\cdot 3\cdot 1001$$

$$=10^3\cdot\underbrace{\left(10^{3n+1}+(-1)^n\cdot 3\right)}_{\text{מתחלק ב- 13 לפי הנחת האינדוקציה}}-\underbrace{(-1)^n\cdot 3\cdot 77\cdot 13}_{\text{מתחלק ב- 13}}$$

ג. $\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכחה :

1) $n=1$, $\quad\frac{1}{4}=\frac{2}{2\cdot 4}=\frac{5}{6}-\frac{7}{3\cdot 4}=\frac{10-7}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

2) נניח שהטענה נכונה עבור n .

3) נוכיח כי

$$\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}+\frac{2}{(n+2)(n+4)}=\frac{5}{6}-\frac{2(n+1)+5}{(n+3)(n+4)}$$

$$\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}+\frac{2}{(n+2)(n+4)}=$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}+\frac{2}{(n+2)(n+4)}=$$

$$\frac{5}{6}-\frac{(2n+5)(n+4)-2(n+3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{5}{6}-\frac{2n^2+8n+5n+20-2n-6}{(n+2)(n+3)(n+4)}=$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2n^2+11n+14}{(n+2)(n+3)(n+4)}=(*)$$

$$2n^2+11n+14=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\frac{-11\pm 3}{4}=\begin{cases}-\frac{14}{4}=-\frac{7}{2}\\ -2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (*)=\frac{5}{6}-\frac{2\left(n+\frac{7}{2}\right)\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+3)(n+4)}=\frac{5}{6}-\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}=$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2(n+1)+5}{(n+3)(n+4)}$$

ד. $1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$

בסיס האינדוקציה : עבור $n=1$ מתקיים $1^2<\frac{(1+1)^3}{3}=\frac{8}{3}$

הנחת האינדוקציה: $1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$

צריך להוכיח $1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2<\frac{(n+2)^3}{3}$

הוכחה:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2<\frac{(n+1)^3}{3}+(n+1)^2=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{3}<\frac{n^3+6n^2+12n+8}{3}=\frac{(n+2)^3}{3}$$

מש"ל

ה. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ מתקיים $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$

הנחת האינדוקציה: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$

צריך להוכיח: $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1$

הוכחה:

$$\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}$$
$$>1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}>1$$

מש"ל