פתרון תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם ${}^{G}/_{H}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם ${}^{G}/_{H}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

פתרון.

א. נבחר $G = S_3$ ואת $H = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה ${}^{G}/_{H}$ מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

ב. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = 2\mathbb{Z}$. אז ${}^{G}/_{H} \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

שאלות רגילות

שאלה 2. הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{56} \to \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

ב. קיים מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ג. קיים איזומורפיזם $f : S_4 \to D_{12}$.

ד. קיים מונומורפיזם $f : A_5 \to \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$.

ה. קיים מונומורפיזם $f : A_4 \to D_{12} \times S_5$.

ו. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. רמז: הבינו למה מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית.

פתרון.

א. קיים אפימורפיזם, והוא אפילו איזומורפיזם. נזכר בטענה ש-$\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $(n, m) = 1$. אצלנו $(7, 8) = 1$ וגם $56 = 7 \cdot 8$.

ב. לא קיים מונומורפיזם. בחבורה $\mathbb{Z}_{40}$ יש איברים מסדר 40, ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ האיברים הם מסדר 20 לכל היותר (כי $20 = \mathrm{lcm}(2, 4, 10)$). אילו היה מונומורפיזם, אז התמונה של איבר מסדר 40 הייתה גם איבר מסדר 40, והרי אין כזה.

ג. לא קיים איזומורפיזם. נכון ששתי החבורות הן לא אבליות מסדר 24, אבל הן עדין לא איזומורפיות. בחבורה D_{12} יש איבר מסדר 12, ואילו ב-S_4 הסדר של האיברים הוא לכל היותר 4.

ד. לא קיים מונומורפיזם. הוכחנו בתרגיל שאי אפשר לשכן חבורה לא אבלית בחבורה אבלית. בפירוט: אילו f היה מונומורפיזם כזה, אז $A_5 \cong \operatorname{im} f$. אבל $\operatorname{im} f \leq \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$ היא תת־חבורה של חבורה אבלית, ולכן בעצמה אבלית. זו סתירה כי A_5 לא אבלית.

ה. קיים מונומורפיזם. אנו יכולים לראות את A_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. כלומר יש מונומורפיזם $f_1 \colon A_4 \to S_5$. כמובן שיש מונומורפיזם $f_2 \colon S_5 \to D_{12} \times S_5$ המוגדר לפי $f_2(\sigma) = (\mathrm{id}, \sigma)$. ההרכבה $f_2 \circ f_1$ היא דוגמה למונומורפיזם המבוקש.

ו. לא קיים אפימורפיזם. אפשר להראות ש-$\mathbb{Q}$ אינה ציקלית למשל על ידי מציאת איבר שאינו שייך לתת־חבורה ציקלית נתונה של $\mathbb{Q}$: אם $\left\langle \frac{a}{b} \right\rangle \leq \mathbb{Q}$ עבור שבר מצומצם $\frac{a}{b}$, אז $\frac{1}{2b} \notin \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, אילו f היה אפימורפיזם, אז $\mathbb{Z}/\ker f \cong \mathbb{Q}$. אבל מנה של חבורה ציקלית, כמו $\mathbb{Z}$, היא בהכרח ציקלית, ובפרט לא איזומורפית לחבורה שאינה ציקלית, כמו $\mathbb{Q}$.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}\!/\!_{K} \times {}^{G}\!/\!_{H}$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f \colon G \to {}^{G}\!/\!_{K} \times {}^{G}\!/\!_{H}$ המוגדרת לפי

$$f\left(g\right) = \left(gH, gK\right)$$

תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1 g_2) = \left(g_1 g_2 H, g_1 g_2 K\right) = \left(g_1 H, g_1 K\right)\left(g_2 H, g_2 K\right) = f(g_1) f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H, K. יהי $g \in \ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f\left(g\right) = \left(gH, gK\right) = e_{G/K \times G/H} = \left(H, K\right)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g \in K$ וגם $g \in H$. כלומר

$$g \in H \cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

שאלה 4. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1, לתת־חבורה שלה $H_1 \lhd G_1$, לחבורה לא אבלית G_2 ולתת־חבורה שלה $H_2 \lhd G_2$, כך ש-$H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}\!/\!_{H_1} \cong {}^{G_2}\!/\!_{H_2}$. רמז: אפשר לבחור את G_1, G_2 להיות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^3.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i, בהתאמה. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה ${}^{G_i}/_{H_i}$ הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong \mathbb{Z}_2 \cong {}^{G_2}/_{H_2}$.
בחירה פופלרית אחרת הייתה החבורות $G_1 = \mathbb{Z}_8$ ו-$G_2 = D_4$.

ב. למעשה לכל p ראשוני אפשר לבחור חבורות מסדר p^2. למשל נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \le G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \le G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

שאלה 5. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \ne G$.
רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

פתרון.

א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.
מינוח: החבורה G היא דוגמה לחבורה מפותלת מאקספוננט אינסופי.

ב. האיברים ב-G הם מחלקות שמאליות של $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{Q}$. כלומר אם $x_i \in G$ עבור $i \in \{1,2\}$, אז קיימים $b_i \in \mathbb{N}$ ו-$a_i \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x_i = \frac{a_i}{b_i} + \mathbb{Z}$. מפני ש-$G$ היא מנה של החבורה $\mathbb{Q}$ שהיא אבלית, אז גם G אבלית. לכן יש לנו תיאור נוח לאיברים בתת־חבורה הנוצרת על ידי קבוצת איברים:

$$\begin{aligned} H &= \left\{ k_1\left(\frac{a_1}{b_1} + \mathbb{Z}\right) + k_2\left(\frac{a_2}{b_2} + \mathbb{Z}\right) \,\middle|\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{k_1 a_1 b_2 + k_2 a_2 b_1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \,\middle|\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \left\langle \frac{1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \right\rangle \end{aligned}$$

כלומר H מוכלת בתת־חבורה ציקלית. ראינו בסעיף הקודם שהסדר של כל איבר הוא סופי. לכן הסדר של כל תת־חבורה ציקלית של G היא סופית, ולכן H סופית. בנוסף, כל תת־חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית, ולכן H ציקלית.

ג. אפשר לבחור את $S = \left\{ \frac{1}{5^i} + \mathbb{Z} \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right\}$, או את $S' = \left\{ \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \,\middle|\, p \text{ prime} \wedge p \ne 7 \right\}$.
קל לראות כי $\langle S \rangle$ ו-$\langle S' \rangle$ אינסופיות כי יש בהן איברים מאינסוף סדרים שונים. בפירוט: ב-S האיבר $\frac{1}{5^i} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר 5^i, ויש אינסוף בחירות עבור i. ב-S' האיבר $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר p, וישנם אינסוף ראשוניים השונים מ-7.

תת־החבורות האלו הן לא כל G מפני ששתיהן לא מכילות את האיבר $\frac{1}{7}+\mathbb{Z}$. אילו היה ניתן להציג אותו כמכפלה של היוצרים והופכיהם, אז

$$\frac{1}{7}+\mathbb{Z}=\left(\frac{1}{b_1}+\mathbb{Z}\right)^{\pm 1}\cdots\left(\frac{1}{b_k}+\mathbb{Z}\right)^{\pm 1}=\frac{a}{\operatorname{lcm}(b_1,\ldots,b_k)}+\mathbb{Z}$$

כאשר $\frac{1}{b_i}+\mathbb{Z}$ שייכים ל-S או S' ו-$a\in\mathbb{Z}$ מתאים (השבר באגף ימין לאו דווקא מצומצם). אבל $\operatorname{lcm}(b_1,\ldots,b_k)$ לא מתחלק ב-7 לפי בחירת S ו-S', וזה לא ייתכן כי כל נציג אחר של $\frac{1}{7}+\mathbb{Z}$ כשבר מצומצם הוא מן הצורה $\frac{7a'+1}{7}+\mathbb{Z}$ עבור $a'\in\mathbb{Z}$.
תשובה לרמז: הסיבה היא שכל תת־חבורה של G הנוצרת על ידי מספר סופי של איברים היא סופית, ואפילו ציקלית.

שאלה 6.

א. מצאו כמה הומומורפיזמים $f\colon\mathbb{Z}_2\to S_6$ קיימים. רמז: שאלה 1 בתרגיל בית 4.

ב. מצאו כמה הומומורפיזמים $f\colon\mathbb{Z}_{25}\to A_8$ קיימים, ומהו $\ker f$ של כל אחד מהם.

פתרון.

א. החבורה $\mathbb{Z}_2$ ציקלית, ולכן הומומורפיזם שהיא התחום שלו נקבע לחלוטין לפי תמונה של יוצר. במילים אחרות, נניח $\mathbb{Z}_2=\langle a\rangle$, אז $f(a^i)=f(a)^i$ לכל i. הסדר של $f(a)$ צריך לחלק את הסדר של a, לפי תרגיל שעשינו בכיתה. כל בחירה באיבר $f(a)$ כזה אכן מגדירה הומומורפיזם שונה. לפיכך האפשרויות עבור $o(f(a))$ הן $1,2$.
אם $o(f(a))=1$, אז מדובר בהומומורפיזם הטריוויאלי, כי יש רק איבר אחד מסדר 1. אם הסדר של $f(a)$ הוא 2, אז בעזרת הרמז אנחנו יודעים שיש 75 איברים מסדר 2 ב-S_6. לכן בסך הכל יש $75+1=76$ הומומורפיזמים $f\colon\mathbb{Z}_2\to S_6$.

ב. באופן דומה לסעיף הקודם, אנו צריכים לדעת לאן נשלח יוצר של החבורה הציקלית $\mathbb{Z}_{25}$. נניח $\mathbb{Z}_{25}=\langle a\rangle$, אז האפשרויות עבור $o(f(a))$ הן $1,5,25$.
אם $o(f(a))=1$, שוב מדובר בהומומורפיזם הטריוויאלי. במקרה זה $\ker f=\mathbb{Z}_{25}$, כי כל האיברים נשלחים לאיבר היחידה. אם הסדר של $f(a)$ הוא 5, אז יש למצוא כמה איברים מסדר 5 יש ב-A_8. איבר מסדר 5 ב-A_n הוא מכפלה של מחזורים זרים שכולם מאורך 5. בחבורה A_8 אפשר "להכניס" רק מחזור אחד באורך 5. יש $\binom{8}{5}(5-1)!$ מחזורים מאורך 5 ב-A_8 לפי התרגיל שעשינו בכיתה (ולכן גם מספר כזה של איברים מסדר 15). לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, הגרעין הוא מסדר 5 ויש ל-$\mathbb{Z}_{25}$ רק תת־חבורה אחת מסדר זה, ולכן $\ker f=5\mathbb{Z}_{25}$. אין איברים מסדר 25 ב-A_8, ולכן בסך הכל יש $\binom{8}{5}(5-1)!+1=1345$ הומומורפיזמים $f\colon\mathbb{Z}_{25}\to A_8$.

שאלה 7. תהינה $G_1,\ldots,G_n$ חבורות ותהינה $H_1,\ldots,H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i\lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1\times\cdots\times H_n\lhd G_1\times\cdots\times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1\times\cdots\times G_n)\,/\,(H_1\times\cdots\times H_n)\cong {}^{G_1}/_{H_1}\times\cdots\times {}^{G_n}/_{H_n}$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1\times\cdots\times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1\times\cdots\times G_n$. נבדוק שהיא סגורה להצמדה. יהיו

$$(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n,\qquad (h_1,\ldots,h_n)\in H_1\times\cdots\times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}\left(g_1,\ldots,g_n\right)\left(h_1,\ldots,h_n\right)\left(g_1,\ldots,g_n\right)^{-1}&=\left(g_1h_1,\ldots,g_nh_n\right)\left(g_1^{-1},\ldots,g_n^{-1}\right)\\&=\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1\leq i\leq n$, תת־החבורה H_i נורמלית ולכן $g_ih_ig_i^{-1}\in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1},\ldots,g_nh_ng_n^{-1}\right)\in H_1\times\cdots\times H_n$.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה אפשר לפתור את שני הסעיפים כאן בבת אחת). מפני ש-$H_i\lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}/_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}/_{H_1}\times\cdots\times{}^{G_n}/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi\colon G_1\times\cdots\times G_n&\to{}^{G_1}/_{H_1}\times\cdots\times{}^{G_n}/_{H_n}\\(g_1,\ldots,g_n)&\mapsto(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi\left(g_1,\ldots,g_n\right)\pi\left(g_1',\ldots,g_n'\right)&=\left(g_1H_1,\ldots,g_nH_n\right)\left(g_1'H_1,\ldots,g_n'H_n\right)\\&=\left(g_1g_1'H_1,\ldots,g_ng_n'H_n\right)=\pi\left(g_1g_1',\ldots,g_ng_n'\right)\\&=\pi\left(\left(g_1,\ldots,g_n\right)\left(g_1',\ldots,g_n'\right)\right)\end{aligned}$$

וזה נכון לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i\colon G_i\to K_i$ שגם $f\colon\prod_i G_i\to\prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i\mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker\pi&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,\middle|\,\pi\left(g_1,\ldots,g_n\right)=e_{G_1/H_1\times\cdots\times G_n/H_n}\right\}\\&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,|\,(g_1H_1,\ldots,g_nH_n)=(H_1,\ldots,H_n)\right\}\\&=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n\,|\,\forall i:g_i\in H_i\right\}=H_1\times\cdots\times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $H\leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H)=\bigcap_{g\in G}gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H)\leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1}\leq G$ לכל $g\in G$.

ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H,K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H)=\{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K)=K$.

פתרון.

א. נעזר ברמז ונוכיח $gHg^{-1}\leq G$ לכל $g\in G$. יהיו $h_1,h_2\in H$. נבדוק סגירות לכפל:

$$\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right)=gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1}=gh_1h_2g^{-1}\in gHg^{-1}$$

כי $h_1h_2\in H$. נבדוק סגירות להופכי:

$$(gh_1g^{-1})^{-1}=(g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1}=gh_1^{-1}g^{-1}\in gHg^{-1}$$

כי $h_1^{-1}\in G$. נותר להראות ש-gHg^{-1} לא ריקה: היא מכילה את איבר היחידה כי $e=geg^{-1}\in gHg^{-1}$. מפני ש-$gHg^{-1}\leq G$ לכל $g\in G$, אז גם החיתוך של כולן הוא גם תת־חבורה. כלומר $\mathrm{Core}(H)\leq G$.

ב. מכיוון ש-$H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך בהגדרת הליבה, אז ברור ש-$\mathrm{Core}(H) \subseteq H$.
יהי $x \in \mathrm{Core}(H)$ ו-$a \in G$ ונראה ש-$\mathrm{Core}(H)$ סגורה להצמדה. נראה כי $axa^{-1} \in gHg^{-1}$ לכל $g \in G$, ונסיק ש-axa^{-1} שייך לחיתוך של כל gHg^{-1}, כלומר לליבה של H. אכן, מפני ש-$a^{-1}g \in G$, אז

$$x \in \mathrm{Core}(H) \subseteq a^{-1}gH\left(a^{-1}g\right)^{-1} = a^{-1}gHg^{-1}a$$

ולכן $axa^{-1} \in aa^{-1}gHg^{-1}aa^{-1} = gHg^{-1}$. לכן $\mathrm{Core}(H) \lhd G$.
תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז לכל $g \in G$, $N = gNg^{-1}$. אם $N \subseteq H$ נקבל

$$N = gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

לכל $g \in G$. לכן $N \subseteq \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = \mathrm{Core}(H)$.
דרך אחרת: ראינו ש-G פועלת על הקבוצה G/H ולכן יש הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S_{G/H}$. אפשר לראות ש-$\ker\varphi = \mathrm{Core}(H)$, ולכן היא בודאי תת־חבורה נורמלית, וזה מוכיח גם את הסעיף הקודם.

ג. הבינו מדוע חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר לדוגמה את $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ו-$K = A_3$. מפני ש-$K \lhd G$, אז לפי הסעיף הקודם $\mathrm{Core}(K) = K$ כי היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של S_3 שמוכלת ב-K. ראינו בכיתה כי H אינה תת־חבורה נורמלית של S_3. לכן $\mathrm{Core}(H) \subsetneq H$. אבל H מסדר 2, ולכן בהכרח $\mathrm{Core}(H) = \{e\}$, שהיא מסדר 1.

שאלות אתגר

שאלה 9. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!