# פתרון תרגיל בית 10 – מופשטת 1

**<u>שאלה 1</u>**

הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

**<u>פתרון</u>**

בכל חבורה מסדר $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $n_5$ מחלק את 24 ושקול ל-1 מודולו 5, ולכן הוא שווה ל-1 או ל-6. נניח בשלילה שהחבורה פשוטה, ולכן $n_5 = 6$ ולכן $\left[G : N_G\left(P_5\right)\right] = 6$ ולכן לפי העידון של משפט קיילי יש שיכון $G \hookrightarrow S_6$. משיקולים זהים לאלה שעשינו בתרגול מתקיים שיש שיכון $G \hookrightarrow A_6$. כעת, מתקיים $\left[A_6 : G\right] = 3$. לפי העידון של משפט קיילי קיים שיכון $A_6 \hookrightarrow S_3$ (מדוע זה שיכון?) וזאת סתירה (הסדרים של החבורות הללו אינם מאפשרים שיכון זה).

מש"ל

<u>תזכורת</u>: הוכחתם בכיתה טענה שלפיה מכפלה פנימית של תת-חבורות סילו נורמליות מסדרים זרים היא מכפלה ישרה חיצונית.

בתרגיל הבא תוכיחו את הטענה החלשה יותר, אבל עשו זאת לבד, מבלי להסתמך על מה שכבר עשיתם בהרצאה.

**<u>שאלה 2</u>**

הוכיחו שאם כל תת חבורות סילו של $G$ הן נורמליות, אז היא מכפלה ישרה (פנימית) שלהן.

<u>הערה</u>: הגדרתם בכתה מתי חבורה היא מכפלה ישרה (פנימית) של שתי ת"ח. ההגדרה לכל מספר סופי: חבורה היא מכפלה ישרה פנימית של כמה תת-חבורות, אם כולן נורמליות, החבורה שווה למכפלה שלהן, וכל אחת מהן נחתכת באופן טריוויאלי עם המכפלה של כל האחרות. ההגדרה הזו מבטיחה שאם $G$ מכפלה ישרה של $N_1, \ldots, N_t$ אז היא מכפלה ישרה של המכפלה $N_1 \cdot \ldots \cdot N_{t-1}$ ו-$N_t$.

**<u>פתרון</u>**

נניח $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ ולכל $1 \le i \le r$ תהי $T_i$ ת"ח $p_i$ סילו נורמלית (ולכן היחידה מסדרה). נראה ש- $G$ מכפלה ישרה (פנימית) של תתי החבורות $T_i$.

הנורמליות כבר נתונה ולכן נותר לבדוק רק את התכונות האחרות.

<u>למה</u>

אם $A_1,...,A_n \triangleleft G$ תת חבורות נורמליות מסדרים זרים בזוגות. אז $|A_1\cdot...\cdot A_n| = |A_1|\cdot...\cdot|A_n|$.

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה על $n$. הטענה טריוויאלית עבור $n=1$. היא נכונה עבור $n=2$ מכיוון ש $|A_1A_2| = \frac{|A_1|\cdot|A_2|}{|A_1\cap A_2|}$ לפי משפט האיזומורפיזם השני. נניח שהטענה נכונה ל-$n$. נוכיח נכונות ל-$n+1$. הסדר של $A_1\cdot...\cdot A_n$ שווה למכפלת הסדרים לפי הנחת האינדוקציה ולכן הוא זר לסדר של $A_{n+1}$. לפי המקרה $n=2$ נובע מכאן ש-
$|A_1\cdot...\cdot A_n\cdot A_{n+1}| = |A_1\cdot...\cdot A_n|\cdot|A_{n+1}| = |A_1|\cdot...\cdot|A_n|\cdot|A_{n+1}|$.

מש"ל למה

לכל $i$ נסמן ב-$S_i$ את המכפלה $\prod_{j\neq i} T_j$. מתקיים ש-$S_i$ היא תת חבורה (כמכפלה של תתי חבורות נורמליות), ונרצה כעת לבדוק מהו הסדר שלה. לפי הלמה, סדרה הוא $\frac{|G|}{p_i^{k_i}}$. לכן החיתוך $S_i\cap T_i = \{1_G\}$ (שכן הסדרים זרים). מכאן מקבלים את ההגדרה של מכפלה ישרה פנימית.

מש"ל

## <u>שאלה 3</u>

**א.** תהא $G$ חבורה עם: 20,52 או 175 איברים. הוכיחו ש-$G$ לא פשוטה.

**<u>פתרון</u>**

אלה הן חבורות מסדר $p^2q$ והראינו בכיתה שחבורות אלה אינן פשוטות.

**ב.** הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר $125$.

**<u>פתרון</u>**

$125=5^3$ ולכן זוהי חבורת $p$ ולכן המרכז שלה אינו טריוויאלי. אבל המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית והחבורה אינה פשוטה.

**ג.** תהא $G$ חבורה מסדר $1645$ או $9797$. הוכיחו ש-$G$ ציקלית.

**<u>פתרון</u>**

**לגבי** $9797$**:**

$9797 = 97 \cdot 101$ ולכן אם $G$ חבורה מסדר $9797$ אז על-פי המשפט על חבורות מסדר $pq$, $G$ ציקלית.

נוכיח זאת (שוב) ישירות. מתקיים:

$$n_{97} \equiv 1 \pmod{97} \ \wedge n_{97} \mid 101 \ \to n_{97} = 1 \to A = P_{97} \lhd G$$

$$n_{101} \equiv 1 \pmod{101} \ \wedge n_{101} \mid 97 \ \to n_{101} = 1 \to B = P_{101} \lhd G$$

נסמן $H = AB$, אזי $H$ היא מכפלה ישרה פנימית של $A$ ו-$B$ (מדוע?) ולכן מתקיים $|H| = |A| \cdot |B| = 9797$ ולכן $H = G$. מכאן $G$ היא מכפלה ישרה פנימית של $A, B$ ולכן (לפי משפט מהרצאה) גם מכפלה ישרה חיצונית שלהן. מתקיים $G \cong A \times B \cong \mathbb{Z}_{97} \times \mathbb{Z}_{101} \cong \mathbb{Z}_{9797}$.

**לגבי** $1645$**:**

$1645 = 5 \cdot 7 \cdot 47$. ניתן לראות ש– $n_{47} = n_7 = n_5 = 1$. שלוש תת החבורות הללו הן ציקליות ונורמליות. נסמן: $H_5 = \langle a \rangle \ ,H_7 = \langle b \rangle \ ,H_{47} = \langle c \rangle$. נציג כעת מקרה פרטי של הדיון שעשינו בהוכחת שאלה 2 (ואולי זה יבהיר אותה קצת יותר):

<u>טענה</u>: היוצרים של שלוש תת החבורות הנ"ל מתחלפים בינהם.

<u>הוכחת הטענה</u>: נראה זאת עבור שני יוצרים (והשאר באותו אופן). מתקיים:

$aba^{-1}b^{-1} = \left(aba^{-1}\right)b^{-1} \in H_7$ כי $H_7$ נורמלית. $aba^{-1}b^{-1} = a\left(ba^{-1}b^{-1}\right) \in H_5$ כי $H_5$ נורמלית. לכן, משיקולי סדרי החבורות, נקבל $aba^{-1}b^{-1} = 1$, כלומר $ab = ba$.

מש"ל טענה.

כעת, יש לנו שלושה איברים בחבורה שמתחלפים בינהם וכן הסדרים שלהם זרים, אזי לפי טענה שהוכחנו בעבר מתקיים:

$o\left(a \cdot b \cdot c\right) = lcm\left(o(a), o(b), o(c)\right) = 1645$ ולכן $\langle a \cdot b \cdot c \rangle = G$ והחבורה היא ציקלית.

**ד.** הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

**<u>פתרון</u>**

17- ראשוני ולכן כל חבורה מסדר זה היא ציקלית, ולכן אבלית.

16 – לא נכון. $D_8$ היא מסדר 16 אך היא לא אבלית.

15- מתקיים $15 = 3 \cdot 5 \ \wedge \ 5 \neq 1 \pmod 3$ ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.

**ה.** הוכיחו שחבורה מסדר 130 אינה פשוטה, ומצאו חבורה לא אבלית מסדר זה.

**<u>פתרון</u>**

קל לבדוק ש- $n_{13}=1$ ולכן יש תת חבורת 13-סילו נורמלית. מכאן החבורה אינה פשוטה. דוגמה לחבורה לא אבלית, אינה פשוטה מסדר 130: $D_{13}\times\mathbb{Z}_5$.

**ו.** תהא $G$ חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה $p$-סילו $H$ כך ש- $\left[G:N_G\left(H\right)\right]=2$.

**<u>פתרון</u>**

נניח בשלילה שקיימת תת חבורה $p$-סילו $H$ כך ש- $\left[G:N_G\left(H\right)\right]=2$. מכיוון ש- $n_p=2$ מתקיים $N_G\left(H\right)\triangleleft G$ ולכן $N_G\left(N_G\left(H\right)\right)=G$. הוכחתם בהרצאה שאם $H$ היא תת-חבורת סילו אזי $N_G\left(N_G\left(H\right)\right)=N_G\left(H\right)$ ולכן מקבלים $N_G\left(H\right)=G$, מה שאומר ש- $H$ נורמלית ו- $n_p=1$. סתירה.

**ז.** הוכיחו שאין חבורה פשוטה מסדר 150.

**<u>פתרון</u>**

בדומה לשאלה הראשונה, נניח בשלילה שקיימת חבורה פשוטה $G$ מסדר 150. מתקיים $n_5\in\left\{1,6\right\}$. מכיוון שהחבורה פשוטה, $n_5=6$ ולכן $\left[G:N_G\left(P_5\right)\right]=6$. מכאן קיים שיכון של $G$ לתוך $S_6$, וזאת סתירה מכיוון ש- 150 אינו מחלק את 720.

**ח.** הוכיחו שחבורה מסדר $1001=7\cdot 11\cdot 13$ היא ציקלית.

**<u>פתרון</u>**

קל לבדוק ש- $n_7=n_{11}=n_{13}=1$ ולכן משאלה 2 מקבלים את הדרוש.

מש"ל

## <u>שאלה 4</u>

**א.** הוכיחו: תהי $K$ תת חבורת $p$-סילו של $G$, ותהי $H\triangleleft G$ כך ש- $p\,\big|\,|H|$. אזי $H\cap K$ היא תת חבורת $p$ סילו של $H$.

**ב.** תנו דוגמה נגדית במקרה ש- $H$ אינה נורמלית.

**<u>פתרון</u>**

**א.** $H\cap K\le K$ ולכן $|H\cap K|\,\big|\,|K|$ ולכן $H\cap K$ היא תת-חבורת $p$. מכיוון ש- $K$ היא תת-חבורת $p-$סילו של $G$ מתקיים $\left(\left[G:K\right],p\right)=1$. ומכיוון ש- $\left[HK:K\right]\,\big|\,\left[G:K\right]$ נקבל שגם $\left[HK:K\right]$ זר ל- $p$. כעת, לפי משפט

האיזומורפיזם השני $[H:H\cap K]=[HK:K]$ ולכן $([H:H\cap K],p)=1$, מה שמוכיח הדרוש.

**ב.** תהי $K=\langle\tau\rangle$ , $G=D_3$ תת חבורת 2-סילו של $G$ ותהי $H=\langle\tau\sigma\rangle=\{id,\tau\sigma\}$.

אזי $H$ בעצמה תת חבורת 2-סילו של $G$ אבל $H\cap K$ היא טריוויאלית.

מש"ל

## <u>שאלה 5</u>

תהי $N\lhd G$ ויהי $f:G\to G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת $p$-סילו של $G$, היא תת חבורת $p$-סילו של $G/N$ (שימו לב שהתמונה היא $PN/N$).

<u>**פתרון**</u>

ניתן להניח שמתקיים $|G|=p^k r,|N|=p^s t$ כאשר $p^{s+1}\nmid|N|,\quad p^{k+1}\nmid|G|$ וכן

$s\le k$ ו- $t\,|\,r$. כעת, תהי $P$ ת"ח $p$-סילו של $G$ אזי סדרה הוא $p^k$. מתקיים:

$\left|G/N\right|=\frac{|G|}{|N|}=p^{k-s}\frac{r}{t}$. מ"ל ש- $\left|PN/N\right|=p^{k-s}$. עפ"י משפט האיזומורפיזם השני

$\left|PN/N\right|=\left|P/P\cap N\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}$. כעת, עפ"י שאלה 4 ידוע ש- $P\cap N$ היא תת חבורת $p$-סילו של $N$ ולכן $|P\cap N|=p^s$ שכן $|N|=p^s t$. לכן,

$\left|PN/N\right|=\left|P/P\cap N\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{p^s}=p^{k-s}$ כדרוש.

מש"ל

## <u>**שאלה 6**</u> (הוכחתם בכיתה, וכדאי לעשות שוב)

הוכיחו שלכל חבורת סילו $H$ מתקיים $N_G(N_G(H))=N_G(H)$.

<u>פתרון</u>

ידוע שלכל $A\le G$ מתקיים $A\lhd N_G(A)$ ובפרט $A\subseteq N_G(A)$. אם ניקח $A=N_G(H)$ נקבל $N_G(H)\subseteq N_G(N_G(H))$. נראה כעת את ההכלה בכיוון ההפוך.

למה (אשר הוכחתם בכיתה, ואתם מוזמנים להוכיחה שוב)

תהא $H$ תת חבורה $p$-סילו של $G$. הוכיחו ש-$H$ היא תת חבורה $p$-סילו יחידה של $N_G(H)$.

כעת, יהי $y \in N_G(N_G(H))$, כלומר $yN_G(H)y^{-1}=N_G(H)$. צריך להראות ש-$y \in N_G(H)$, כלומר $yHy^{-1}=H$. $H \subseteq N_G(H)$ ולכן $yHy^{-1} \subseteq yN_G(H)y^{-1}=N_G(H)$.
מכיוון ש-$H$ היא תת חבורה $p$ סילו יחידה של $N_G(H)$, וגם $yHy^{-1} \le N_G(H)$ ומתקיים $yHy^{-1} \cong H$, נקבל $yHy^{-1}=H$.

הערה לתרגיל

אם $H$ היא לא תת חבורה $p$ סילו אזי הטענה אינה בהכרח נכונה. דוגמה נגדית: $H=\langle(12)\rangle \le S_4$.

הערה נוספת

בחבורות $p$ ממש ההיפך נכון: המנרמל תמיד גדול מתת-החבורה.

מש"ל

## שאלה 7

אם $G$ חבורה פשוטה (ואינה $\mathbb{Z}_2$), וקיימת לה תת חבורה $H$ מאינדקס $n$, אזי אפשר לשכן את $G$ ב-$A_n$.

פתרון

לפי עידון של משפט קיילי קיים שיכון של $G$ ב-$S_n$. נתבונן בעותק של $G$ בתוך $S_n$ ונמשיך לקרוא לו $G$ למען הנוחות. מתקיים $G \cap A_n \triangleleft G$ ולכן, מכיוון ש-$G$ פשוטה, מתקיים אחד מהשניים: $G \cap A_n = \{id\}$ או $G \cap A_n = G$. האפשרות הראשונה אינה אפשרית. הסבר: מתקיים $[G : G \cap A_n] \le [S_n : A_n] = 2$ ולכן נקבל $[G:\{id\}]=|G| \le 2$ בסתירה להנחה. לכן $G \cap A_n = G$ וזה מוכיח הדרוש.

מש"ל