אינפי 3

תרגול 9

תזכורת-מציאת נק' קיצון:

1. משווים את הנגזרות החלקיות לאפס.
2. מציבים במטריצת ההסיאן.
3. אם המטריצה חיובית לחלוטין- נק' מינימום
   אם המטריצה שלילית לחלוטין-נק' מקסימום
   אחרת: נק' אוכף

* הערה: במקרה בו אחד הערכים העצמיים/מינורים הוא אפס, נתייחס אל אותו מינור/ערך עצמי ככזה שלא נותן מידע.

מציאת נק' קיצון עם אילוץ:

אנו רוצים למצוא נקודת קיצון של פונקציה $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ כאשר יש לנו אילוצים:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

כאשר $1 \leq i \leq m$.

אילוץ פירושו תנאי מסויים שהנקודה צריכה לקיים.

כדי לחשב למצוא קיצון שכזה, נגדיר פונקציה חדשה:

$$L = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i + f$$

פונקציה זו נקראת הלגרנז'יאן. נחפש את הקיצון של הלגרנז'יאן בשיטות שאנו מכירים (השוואת גרדיאנט ל-0 וכו').

הקיצון שנמצא הוא הקיצון שלנו תחת האילוצים הנתונים.

תרגיל

יש לנו פחית גלילית עם נפח V, ואנו רוצים למצוא את שטח הפנים המינימלי האפשרי לפחית כזאת.

<u>פתרון:</u>

לחישוב שטח פנים A אנו צריכים 2 משתנים - גובה הגליל ורדיוסו

כלומר, נחקור את הפונקציה:

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

עם האילוץ:

$$V - \pi r^2 h = 0$$

הלגרנז'יאן שלנו היא:

$$L(r,h,\lambda)=2\pi r^2+2\pi rh+\lambda\left(V-\pi r^2h\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_r=4\pi r+2\pi h-2\lambda\pi hr=0$$

$$L_h=2\pi r-\lambda\pi r^2$$

$$L_\lambda=V-\pi r^2h=0$$

ואם נפתור את המשוואות נקבל:

$$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

נציב בפונקציה A ונקבל את שטח הפנים המינימלי.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ בתחום:

$$D=\{(x,y)|xy\geq 4, x+2y\leq 9, x\geq 0, y\geq 0\}$$

פתרון:

קודם כל, נחפש נקודות חשודות בתוך התחום. נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונקבל:

$$(1,1)=(0,0)$$

וזה כמובן לא אפשרי. לכן אין נקודות חשודות בפנים התחום (וקל וחומר שאין שם קיצון).

נחפש נקודות חשודות על השפה.

ראשית, במקרים $x=0$ ו־$y=0$ הנקודות אינן בתחום, כי נדרש $xy\geq 4$.

אם $x+2y=9$ אז $x+y=9-y$, כלומר נחפש נקודות קיצון של:

$$9-y$$

וזהו קו ישר, והקיצון שלו תתקבלנה בקצוותיו. כלומר, כאשר $x+2y=9$ וגם $xy=4$.
נפתור את שתי המשוואות האלו, ונקבל: $y=4, y=\frac{1}{2}$.
לכן, הנקודות החשודות הן: $(1,4), (8,\frac{1}{2})$.
נותר לחפש נקודות חשודות על $xy=4$. כלומר:

$$y=\frac{4}{x}$$

נגזור, נשווה ל-0 ונקבל:

$$1-\frac{4}{x^2}=0$$

ולכן: $x=\pm 2$.
נזכור כי $x\geq 0$ ולכן רק $x=2$ מתאים ולכן הנקודה החשודה היא $(2,2)$.
כעת נבדוק מהו הערך של f בכל אחת מהנקודות החשודות:

$$f(8,\frac{1}{2})=8\frac{1}{2} \qquad f(2,2)=4 \quad f(1,4)=5$$

ולכן $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי בתחום D, ו–$(8,\frac{1}{2})$ היא נקודת מקסימום גלובאלי בתחום D.

שימו לב שלא השתמשנו בכופלי לגרנז'.

תרגיל:

מצאו את המרחק המינימלי בין הנקודה $(0,0)$ להיפרבולה:

$$7x^2 + 8xy + y^2 = 45$$

פתרון:

הפונקציה שלנו צריכה לתאר מרחק, קרי: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
עם זאת, אפשר למצוא קיצון לפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$, מכיוון שאם נמצא נקודה שבה ריבוע המרחק הוא מינימלי, גם המרחק יהיה מינימלי.
האילוץ שלנו הוא:

$$g(x,y) = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45$$

ולכן הלגרנז'יאן תהיה:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(7x^2 + 8xy + y^2 - 45)$$

נשווה את הגרדיאנט ל–0 ונקבל:

$$L_x = 2x + 14\lambda x + 8\lambda y = 0$$

$$L_y = 2y + 2\lambda y + 8\lambda x = 0 \qquad L_\lambda = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45 = 0$$

נפתור את המשוואות ונקבל:

$$\lambda = 1$$

ואת הנקודות $(-2,-1)$, $(2,1)$.

נציב אותן בפונקציה ונקבל:

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 5$$

נזכור שזהו ריבוע המרחק, ולכן המרחק הוא $\sqrt{5}$.

אינטגרציה:

ראשית, מספר תכונות:

יהיו R, R_1, R_2 תחומים (חסומים) וסגורים ב$-\mathbb{R}^2$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בתחומים אלו. כמו כן, יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אזי:

1. $\iint_R (af + bg)\, ds = a \iint_R f ds + b \iint_R g ds$.
2. אם $R_1 \cup R_2 = R$ וגם $R_1 \cap R_2 = \phi$, אז: $\iint\limits_R f ds = \iint\limits_{R_1} f ds + \iint\limits_{R_2} f ds$.
3. קיימת נקודה (x_0, y_0) עבורה: $\iint\limits_R f ds = S(R) \cdot f(x_0, y_0)$, כאשר $S(R)$ הוא שטח התחום R.

4. $m \cdot S(R) \leq \iint\limits_R f ds \leq M \cdot S(R)$, כאשר $M = \max\limits_R f, m = \min\limits_R f$.

5. $\left|\iint\limits_R f ds\right| \leq \iint\limits_R |f| ds$.

הסימון ds משמעו אינטגרציה לפי כל המשתנים הרלוונטיים, למשל במישור:

$$ds = dxdy$$

איך מחשבים אינטגרל כפול?

1. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום המלבני: $R=[a,b]\times[c,d]$, אזי:

$$\iint\limits_R f\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

2. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום: $R=\{a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, אזי:

$$\iint\limits_R f\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

3. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום $R=\{x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$, אזי:

$$\iint\limits_R f\,dxdy=\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

תרגיל

חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint\limits_R y^2x^2ds$$

במלבן $R=[-3,2]\times[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $f(x,y)=y^2x^2$. f רציפה ותחומנו מלבני. לכן:

$$\iint\limits_R y^2x^2ds=\int_0^1\int_{-3}^2 y^2x^2dxdy=\int_0^1\left(\int_{-3}^2 y^2x^2dx\right)dy$$

והאינטגרל הפנימי הוא אינטגרל במשתנה אחד. לכן:

$$= \int\limits_0^1 \left(\left[\frac{y^2 x^3}{3} \right]_{x=-3}^{x=2} \right) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{8y^2}{3} + \frac{27y^2}{3} \right) dy = \left[\frac{8y^3}{9} + 3y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{35}{9}$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_R x^2 y dx dy$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י x=-2, x=2, $y^2 - x^2 = 1$

פתרון:

התחום שלנו הוא:

$$R = \{-2 \le x \le 2, -\sqrt{1+x^2} \le y \le \sqrt{1+x^2}\}$$

והאינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_R x^2 y dx dy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} x^2 y dy dx = \int_{-2}^{2} \left(\left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{1+x^2}}^{y=\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2(1+x^2)}{2} - \frac{x^2(1+x^2)}{2} \right) dx = \int_{-2}^{2} 0 dx = 0$$

תרגיל:

חשבו את $\iint\limits_D ydxdy$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין הישר $y=-x+5$ והמעגל $x^2+y^2=25$ ברביע הראשון.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$D=\{0\le x\le 5, 5-x\le y\le \sqrt{25-x^2}\}$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^5\left(\int\limits_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} ydy\right)dx=\int\limits_0^5\left[\frac{y^2}{2}\right]_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}}dx=$$

$$=\int\limits_0^5\left(\frac{25-x^2}{2}-\frac{(5-x)^2}{2}\right)dx=\left[\frac{25x}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{(5-x)^3}{6}\right]_0^5=\frac{125}{6}$$

<u>תרגיל:</u>

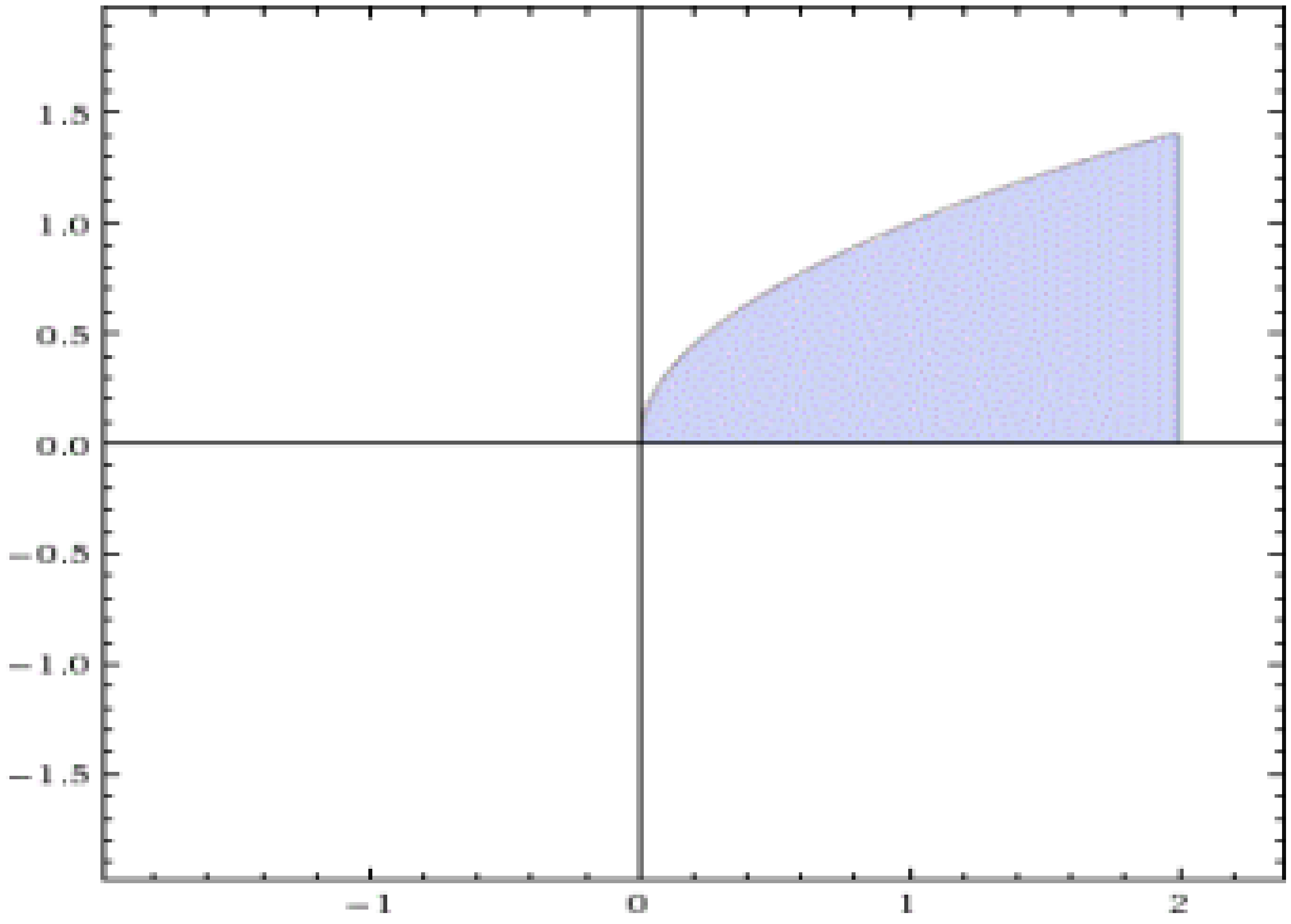
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

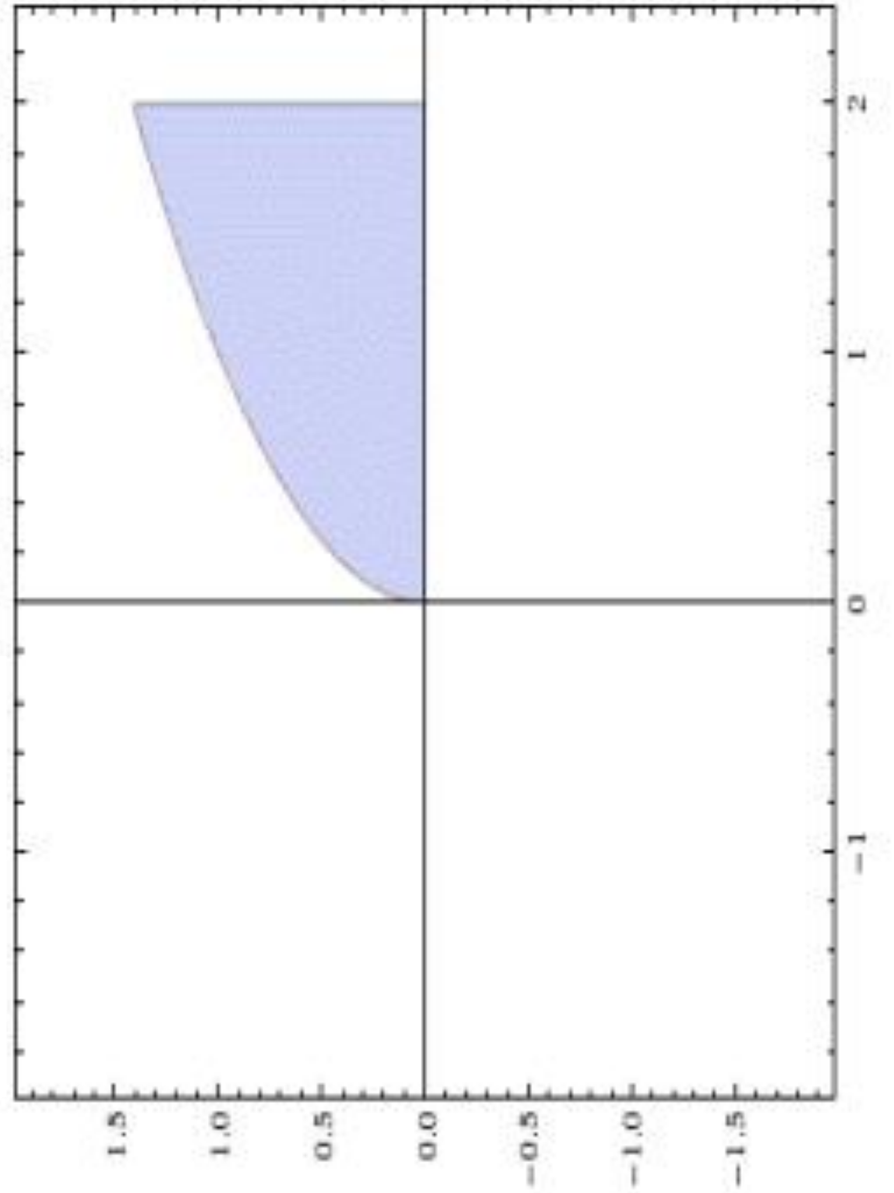
<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$



נסובב את התחום ונקבל:



כלומר:

$$\left\{0 \le y \le \sqrt{2}, y^2 \le x \le 2\right\}$$

ולכן:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f\left(x, y\right) dydx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{2} f\left(x, y\right) dxdy$$

תרגיל:

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy$$

פתרון:

התחום שלנו הוא:

$$\{1 \le x \le e^y, 0 \le y \le 2\}$$

כלומר:

$$\{1 \le x \le e^2, \ln x \le y \le 2\}$$

ולכן:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy = \int_1^{e^2} \int_{\ln x}^{2} f(x,y)dydx$$

תרגיל:

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_{0}^{4}\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$$

פתרון:

התחום שלנו הוא:

$$\{0 \le x \le 4, 3x^2 \le y \le 12x\}$$

כלומר:

$$\{0 \le y \le 48, \frac{y}{12} \le x \le \sqrt{\frac{y}{3}}\}$$

ולכן:

$$\int_{0}^{4}\int_{3x^3}^{12x} f(x,y)dydx = \int_{0}^{48}\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy$$

תרגיל:

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dydx$$

פתרון:

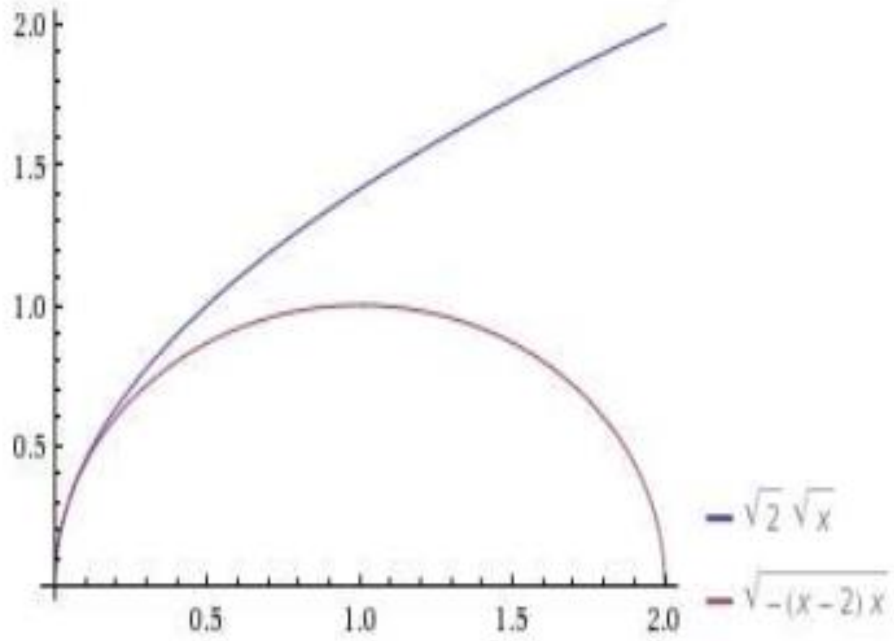
נצייר את הגרפים של שתי הפונקציות: $y = \sqrt{2x - x^2}, y = \sqrt{2x}$.

שימו לב שהפונקציה $y = \sqrt{2x - x^2}$ היא המעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בנקודה $(1,0)$:

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Longrightarrow y^2 + x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות היא $x = 0$.

התחום שלנו הוא התחום הכלוא בין שתי הפונקציות:



בחצי המעגל, לכל $y \neq 1$ יש שני x מתאימים. כשנסובב, נקבל שלכל $x \neq 0$ יש שני y מתאימים, ולכן לא נוכל לבטא אותו כפונקציה של y (פונקציה הרי צריכה להיות חד ערכית).

מה נעשה?

נחלק את התחום שלנו לתחומים בהם אפשר להביע את x כמו שאנו צריכים.

נשים לב ש:

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2} + 1$$

הסימן נקבע בהתאם לתחום. כמו כן:

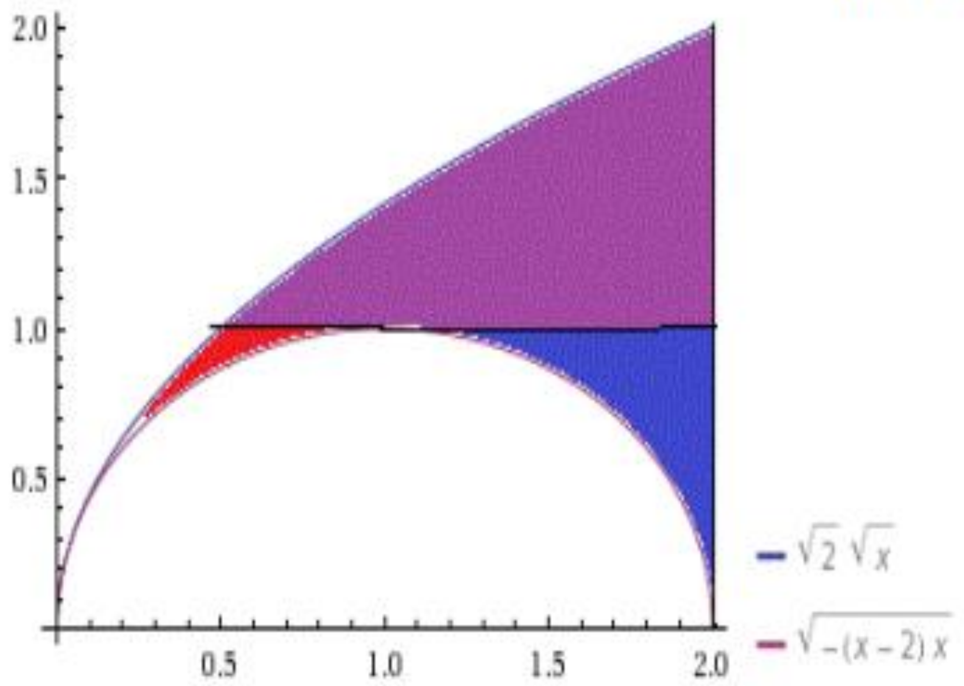
$$y = \sqrt{2x} \Longrightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

התחום הראשון הוא $0 \le y \le 1$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le -\sqrt{1-y^2}+1$.

התחום השני הוא $0 < y \le 1$ ובו $\sqrt{1-y^2}+1 \le x \le 2$.

התחום השלישי הוא $1 \le y \le 2$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le 2$.

כלומר:



התחום הראשון הוא האדום, השני הכחול והשלישי הסגול.

סכום שלושת האינטגרלים הללו ייתן לנו את האינטגרל המבוקש.

לאחר שהבנו מתי ואיך מחליפים את סדר האינטגרציה, נוכל סוף כל סוף לבצע אינטגרציה.