מבוא לתורת החבורות תרגיל 10

1. תהי G חבורה שפועלת על קבוצה X כך שיש $x \in X$ עם: $|orb(x)| = 2$. הוכיחו שיש בG תת חבורה נורמלית.
פתרון:

עבור אותו x מתקיים: $|orb(x)| = [G : stab(x)]$. כלומר, נקבל שהמייצב של x הוא תת חבורה מסדר 2, ולכן זאת תת חבורה נורמלית. (כזכור, כל תת חבורה מסדר 2 היא נורמלית)

2. תהי G חבורה מסדר 77 הפועלת על קבוצה X בת 6 איברים. הוכיחו שהפעולה טריוויאלית.
פתרון:

כל מסלול צריך לחלק את הגודל של G. אף מספר בין 2 ל 6 לא מחלק את 77 ולכן כל המסלולים הם באורך 1 כלומר הפעולה טריויאלית

$$g * x = x$$

3. תהי $\pi = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10) \in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.
פתרון:

המרכז $C_{S_{10}}(\pi)$ הוא המייצב לגבי פעולת ההצמדה של S_{10} על עצמה. המסלול הוא מחלקת הצמידות של π, וידוע לנו כי

$$|conj(\pi)| = [S_{10} : C_{S_{10}}(\pi)] = \frac{|S_{10}|}{|C_{S_{10}}(\pi)|}$$

ולכן מספיק לחשב כמה תמורות צמודות ל־π ב־S_{10}. אך מחלקות צמידות ב־S_n נקבעות לפי מבנה המחזורים. כמה מחזורים יש מן המבנה $(4,3,3)$? ודאו

שאתם יודעים לפתור את השאלה הקומבינטורית הזו ולקבל:

$$|C_{S_{10}}(\pi)| = \frac{|S_{10}|}{|conj(\pi)|} = \frac{10!}{\binom{10}{4}(4-1)!\binom{10-4}{3}(3-1)!\binom{6-3}{3}(3-1)!\frac{1}{2!}}$$
$$= \frac{10!}{\frac{10!}{4!6!}3!\frac{6!}{3!3!}2!\frac{3!}{3!0!}2!\frac{1}{2!}} = 72$$

4. מצאו את הגדלים של מחלקות הצמידות בחבורה D_5. (רמז: אין צורך למצוא את מחלקות הצמידות במפורש)

פתרון:

הגודל של כל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. במקרה שלנו, מחלקות הצמידות יכולות להיות מגודל: $1 \vee 2 \vee 5 \vee 10$. ידוע שהגודל של מחלקת הצמידות של איבר היחידה הוא 1. כמוכן, כל מחלקות הצמידות יוצרות ביחד את החבורה, ולכן סכום הגדלים הוא 10. האופציה היחידה ליצורך כך את 10 היא: $1+2+2+5$. מכאן שיש מחלקת צמידות אחת מגודל 5 ו2 מחלקות צמידות מגודל 2.

5. תהי G חבורה ו$H \leq G$ תת חבורה. נסמן: $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$ ה"מנרמל" של H בG. זוהי תת חבורה. הוכיחו: מס' תת החבורות של G הצמודות לH שווה ל$[G : N_G(H)]$. (רמז: G פועלת על תת החבורות שלה ע"י הצמדה)

פתרון:

נסמן בX את אוסף תת החבורות של G. אפשר להגדיר פעולה של G על X באופן הבא: לכל $g \in G$ ולכל $K \leq G$, $g * K = gKg^{-1}$. זאת גם תת חבורה. הוכחה:

איבר יחידה: $e = geg^{-1}$.

הופכי: יהי $gkg^{-1} \in gKg^{-1}$. אז, $(gkg^{-1})^{-1} = gk^{-1}g^{-1} \in gKg^{-1}$.

סגירות לפעולה: יהיו $gkg^{-1}gxg^{-1} \in gKg^{-1}$, אז $(gkg^{-1})(gxg^{-1}) = gkxg^{-1} \in gKg^{-1}$.

נוכיח שזאת אכן פעולה.

איבר יחידה: $e * K = eKe^{-1} = K$.

אסוציאטיביות: $g*(h*K) = g*(hKh^{-1}) = ghKh^{-1}g^{-1} = (gh)K(gh)^{-1} = (gh)*K$.

כעת, תהי H תת חבורה. המסלול של H זה כל תת החבורות מהצורה gHg^{-1} לאיזשהו $g \in G$, כלומר, כל תת החבורות שצמודות לה. בנוסף, המייצב של H זה כל ה$g \in G$ כך ש: $g * H = gHg^{-1} = H$, כלומר, המנרמל של H.

ידוע ש: $|orb(H)| = [G : stab(H)]$, ומכאן ש: $[G : N_G(H)]$ שווה למספר תת החבורות שצמודות לH. מש"ל.

6. רוצים לבנות צמיד בעל 16 חרוזים מחרוזים ב2 צבעים. כמה צמידים כאלו אפשר לבנות? (רמז: הלמה של ברנסהייד)
פתרון:

נסמן: X זה הקבוצה של כל המעגלים באורך 16 שצבועים ב2 צבעים.

$G = \mathbb{Z}_{16}$פועל על X ע"י: n כפול מעגל צבוע, זה לסובב את המעגל בn מקומות.

2 מעגלים צבועים שנבדלים בסיבוב מייצגים למעשה את אותו צמיד. לכן אנחנו מחפשים את מס' המסלולים של X תחת הפעולה של G.

לפי הלמה של ברסהייד:

$$k = \frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G}|X^g|$$

במקרה שלנו $|G| = 16$.

אנחנו צריכים לחשב את מס' נקודות השבת של כל איבר.

ובכן:

X^0 זה פשוט כל הקבוצה, שהיא מגודל 2^{16}.

X^1 זה כל המעגלים ששווים לעצמם אחרי סיבוב במקום 1, שזה אומר כל המעגלים שצבוכים רק בצבע אחד. יש 2 כאלה.

באופן כללי, אם נסתכל על מקום כלשהו i במעגל, אז אחרי הפעלה של n הוא הולך ל$i+n$, ואם קיבלנו את אותו מעגל צבוע, זה אומר שהצבע של i שווה לצבע של $i + n$. כלומר, אם מעגל צבוע נשמר ע"י nאז הצבע של 0 שווה לצבע של n שווה לצבע של $2n$ וכו'. אם n זר ל16 נקבל שכל המקומות צבועים באותו צבע.

כלומר, לכל n שזר ל16, $|X^n| = 2$.

X^2 זה כל המעגלים שבהם כל הזוגיים צבועים באותו צבע וכל האי זוגיים באותו צבע, לכן $|X^2| = 2^2 = 4$.

באותו אופן נראה ש: $|x^4| = 2^4 = 16$

$|X^8| = 2^8 = 256$.

נותר לבדוק את המספרים שלא מחלקים את 16 ולא זרים לו: $6, 10, 12, 14$.

נחשב למשל עבור 6. נעקוב אחרי ה"מסלול" של 0. (הכוונה למיקום 0 בשרשרת). $0 \to 6 \to 12 \to 2 \to 8 \to 14 \to 4 \to 10 \to 0$.

זה אומר שכל המקומות האלה צריכים להיות צבועים באותו צבע. כלומר, כל הזוגיים באותו צבע, ובאותו אופן עם המספר 1נראה שכל האי זוגיים באותו צבע. כלומר, $|X^6| = 2^2 = 4$.

נחשב עבור 10: $0 \to 10 \to 4 \to 14 \to 8 \to 2 \to 12 \to 6 \to 0$.

שוב, כל הזוגיים צריכים להיות צבועים באותו צבע, ובאותו אופן עם המספר 1 נראה שכל האיזוגיים צבועים באותו צבע. לכן $|X^{10}| = 2^2 = 4$.

נחשב עבור 12 ו14 בדרכים דומות ונקבל $|X^{12}| = 2^4, |X^{14}| = 2^2$

לסיכום, מספר הצמידים שניתן לבנות הוא:

$$\frac{1}{16}(2^{16} + 2^8 + 2^4 + 2^2 + 8 \cdot 2 + 4 + 4 + 4 + 16) = 4116$$

7. רוצים לבנות לוח משבצות בגודל 4×4 ולצבוע כל משבצת בשחור או לבן. 2 לוחות נקראים שווים אם אפשר להגיע מאחד לשני ע"י סיבוב. כמה לוחות כאלו יש?
פתרון:

הקבוצה שלנו היא כל הלוחות 3×3 הצבועים בשחור ולבן, בלי שום יחס שקילות.

החבורה הפועלת היא $\mathbb{Z}_4$, שפועלת ע"י סיבוב הלוח ב$90n$ מעלות.

אנחנו בעצם רוצים לדעת כמה מסלולים יש. נשתמש בלמה של ברסהייד.

$|G| = 4$.

$|X^0| = |X| = 2^9$.

1 זה סיבוב ב90מעלות. הוא שומר על כל הלוחות שהפינות שלהן שוות (כי הוא מעביר פינה לפינה) ושהמשבצות האמצעיות בכל צלע שוות, כי הוא מעביר אותן אחת לשניה. לכן צריך לבחור צבע לפינות, צבע למשבצות האמצעיות בכל צלעף וצבע למשבצת הפנימית. כלומר, $|X^1| = 2^3 = 8$.

3 שומר על אותם דברים ולכן $|X^3| = 2^3 = 8$.

2 זה סיבוב ב180 מעלות. נסמן את המשבצות באופן הבא: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. הוא מעתיק את 1 על 9, את 3 על 7, את 2 על 8 ואת 4 על 6. 1 ו9 צריכים להיות באותו צבע, וכו'. נקבל ש: $|X^2| = 2^5$.

מהלמה של ברנסייד נקבל שמספר המסלולים שווה ל:

$$\frac{1}{4}(2^9 + 8 + 8 + 2^5) = 140$$