קבוצות ממידה אפס על הישר $\mathbb{R}$

עבור קטע $I=[a,b]$ או $I=(a,b)$, נסמן את אורכו $\ell(I)=b-a$.

הגדרה: (מידה אפס)

קבוצת נקודות E על הישר היא **בעלת מידה אפס**
אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרת קטעים (סופית או אינסופית) $(I_n)_{n\geq 1}$ כך ש- $E\subseteq\bigcup_{n\geq1} I_n$ (כלומר איחוד הקטעים מכסה את הקבוצה) "כיסוי"
ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<\varepsilon$.

טענה

1. קבוצה בת מנייה על הישר היא בעלת מידה אפס.
2. אם B בעלת מידה אפס ו- $A\subseteq B$ אז גם A בעלת מידה אפס.
3. אם A_k בעלת מידה אפס לכל $k\in\mathbb{N}$ כלשהו, אז: $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ גם היא בעלת מידה אפס. ("איחוד בן מנייה של בעלות מידה אפס הוא בעל מידה אפס").

הוכחה:

1. תהי $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ בת מנייה ויהי $\varepsilon>0$. לכל k יהיה I_k הקטע: $I_k:=\left(a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},a_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$ אז $A\subseteq\bigcup_k I_k$, לכל k
אורך הקטע I_k הוא $\ell(I_k)=\frac{\varepsilon}{2^k}$ וסכום אורכי הקטעים:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\sum_{k\geq1}\frac{1}{2^k}=\varepsilon$$
לכן A בעלת מידה אפס.

2. ברור כי כיסוי של B יהיה כיסוי של A.

3. יהי $\varepsilon>0$. לכל k נמצא כיסוי בן מנייה H_k של קטעים שמכסה את A_k, וכך שסכום אורכי הקטעים ב- H_k הוא $\frac{\varepsilon}{2^k}$.
אז $\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$ הוא אוסף בן מנייה של קטעים (איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה)
וסכום אורכי הקטעים ב- $\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$ יהיה $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$, כנדרש!

Lebesgue

משפט (קריטריון לבג לאינטגרביליות)

יהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אז f אינטגרבילית רימן $\Longleftrightarrow$

f חסומה וקבוצת נקודות אי הרציפות שלה בעלת מידה אפס!

מסקנה: אם $f:[a,b]\to[c,d]$ אינטגרבילית ו- $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז $g\circ f$ אינטגרבילית.

הוכחה:

אוסף נקודות אי הרציפות של f הינו קבוצה בעלת מידה אפס (מלבג).

כעת, $g\circ f$ רציפה בנקודות הרציפות של f (מהרכבת פונקציות).

לכן אוסף נקודות אי הרציפות של $g\circ f$ מוכל באוסף נקודות אי הרציפות של f, ומכאן בעל מידה אפס.

$\blacksquare$

דוגמא I

פונקציית דיריכלה אינה רציפה באף נקודה ב- $[0,1]$ וכל כיסוי של קטעים שמכסה את $[0,1]$ יהיה בעל סכום אורכים ≥ 1, ולא אפס!

דוגמא II:

ניזכר בפונקציה
$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}; & x=\frac{p}{q} \text{ מצומצם}\\ 0; & \text{אחרת}\end{cases}$$
(פונקציית רימן). הראינו בעבר כי היא אינטגרבילית רימן. נראה זאת בעזרת משפט לבג:

טענה: פונקציית רימן רציפה ב- $[0,1]$ רק בנקודות האי רציונליות.

הוכחה: יהי a מספר ב- $[0,1]$.

יהי $\varepsilon>0$. קיים טבעי k עבורו $\frac{1}{k}<\varepsilon$. ראינו בהוכחה כי הקבוצה F של כל הרציונליים ב- $[0,1]$ בעלי מכנה קטן מ- k, היא סופית! ולכן קיים $\delta>0$ כך ש: $(a-\delta,a+\delta)\cap F=\emptyset$. לכל רציונלי $\frac{m}{n}\in(a-\delta,a+\delta)\cap[0,1]$ קיים $n\geq k$. ולכן: $\left|R(\frac{m}{n})-0\right|=\left|\frac{1}{n}-0\right|\leq\frac{1}{k}<\varepsilon$.

בנוסף, לכל אי רציונלי x, $x\in(a-\delta,a+\delta)\cap[0,1]$ קיים $R(x)=0$ $\Leftarrow$ $|R(x)-0|<\varepsilon$.

לכן, לכל מספר $x\in[0,1]$, אם $|x-a|<\delta$ אז: $|f(x)-0|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

מסקנה: לכל $a\in[0,1]$, $\lim_{x\to a} R(x)=0$.

אך $R(a)=0$ אם a אי רציונלי ! - $R(a)\neq 0$ ל- a רציונלי

ולכן $R(x)$ רציפה בנקודות האי רציונליות, ולא רציפה ברציונליות.

$\Downarrow$

(*) קבוצת נקודות האי רציפות של $R(x)$ ב- $[0,1]$

היא קבוצת הרציונליים בקטע שהיא בת מנייה, ולכן

מידתה אפס $\Leftarrow$ $R(x)$ אינטגרבילית רימן ב- $[0,1]$ לפי משפט

לבג