לינארית 2 תש"ף סמסטר א' -בוחן

מרצים: ד"ר אליהו מצרי, פרופסור בוריס קוניאבסקי
מתרגלים: תמר בר-און, איתי לוינס, פולינה לוצקר, רונה קרני.
הנחיות: יש לפתור את כל השאלות הבאות. עליכם לנמק כל צעד, ולהראות את החישובים.
ניקוד מקסימלי: 108 נקודות.
בהצלחה!

1. (12 נקודות לכל סעיף) עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ענו על הסעיפים הבאים:

(א) חשבו את הפולינום האופייני ואת הע"ע של A.

(ב) לכל ע"ע של A מצאו את המרחב העצמי המתאים לו, וחשבו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

(ג) חשבו את הפולינום המינימלי של A.

(ד) מצאו את צורת הג'ורדן של A.

i.

$$p_A = |xI - A| = \left| \begin{pmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -6 & 0 & x+3 \end{pmatrix} \right| = (x-3)(x-2)(x+3) - 6 + 6(x-2) = x(x+1)(x-3)$$

הע"ע של A הם $0, -1, 3$

ii.

$$V_0 = N \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-1} = N \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_3 = N \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הר"ג של כל ע"ע הוא 1.

iii. מכיוון שהפ"מ מחלק את הפ"א, ויש בו את אותם גורמים, נקבל: $m_A = p_A =$
$x(x+1)(x-3)$

iv. לA יש 3 ע"ע שונים, ולכן היא לכסינה. צורת הגורדן של A היא $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

2. (20 נקודות) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה, שכל הע"ע שלה אי-שליליים. הוכיחו שקיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B^2 = A$.
הוכחה:

נסמן ב $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$ את הצורה האלכסונית של A. כלומר, קיימת P ממשית הפיכה כך ש $A = PDP^{-1}$. נסמן $C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$. C מטריצה ממשית מכיוון ש$\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. מתקיים:

$$A = PC^2P^{-1} = (PCP^{-1})^2$$

$B = PCP^{-1}$ היא המטריצה הרצויה.

3. (20 נקודות) הוכיחו/ הפריכו: יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות לכסינות. אזי $A+B$ לכסינה.
הפרכה:

נקח $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. שתיהן לכסינות כי יש להן 2 ע"ע שונים. (הן משולשיות הע"ע הם איברי האלכסון). אבל $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ הוא בלוק ג'ורדן ולכן לא לכסין.

4. (20 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ מטריצה נילפוטנטית, כך ש $\text{rank}(A) = 2$. הוכיחו ש$A^3 = 0$
הוכחה:

A נלפוטנטית ולכן הע"ע היחיד שלה הוא 0. מכיוון ש$\text{rank}(A) = 2$, $\dim N(A) = 3$, כלומר, הר"ג של 0 הוא 3. נקבל שבצורת ג'ורדן של A יש 3 בלוקים. מכיוון שסכום גדלי הבלוקים מסתכם ל5, הבלוק הכי גדול הוא מגודל לכל היותר 3. הגודל של הבלוק הכי גדול הוא המעלה של 0 בפ"מ. מכיוון שA נלפוטנטית, הפ"מ הוא x^k, כך ש$k \leq 3$. לכן $A^3 = 0$.