אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 4

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

יהי $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$ עם פעולות הכפל והחיבור של מטריצות.

א. הראו ש S הוא תת חוג של $M_2(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו כי $I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d\end{pmatrix} : b,d\in\mathbb{R}\right\}$ אידיאל בחוג S.

ג. הראו שחוג המנה S/I איזומורפי לחוג $\mathbb{R}$ (בפעולות הרגילות).

פתרון

א. יהיו $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\in S$. $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ 0 & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in S$,

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\in S$. ולכן S הוא תת חוג של $M_2(\mathbb{R})$.

ב. נוכיח תחילה ש I תת חבורה חיבורית. יהיו $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\in I$

$A-B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-b_{12} \\ 0 & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in I$ ולכן I תת חבורה חיבורית.

יהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\in S, B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\in I$ אז

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\in I$$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12}a_{22} \\ 0 & b_{22}a_{22}\end{pmatrix}\in I$, ולכן I אידיאל.

ג. נתבונן בהעתקה $\varphi: S\to\mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא: $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\right)=a$. נוכיח ש $\varphi: S\to\mathbb{R}$ הומומורפיזם. יהיו $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\in S$

$$\varphi(A\cdot B)=\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\right)=a_{11}b_{11},\varphi(A)\cdot\varphi(B)=\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\right)=a_{11}b_{11}$$

$$\varphi(A+B)=\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\right)=a_{11}+b_{11},\varphi(A)+\varphi(B)=\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}\right)=a_{11}+b_{11}$$

מכיון ש $0=\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\right)$ נקבל ש $\ker\varphi=I$. עבור $a\in\mathbb{R}$ $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=a$ ז"א $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}$.

על פי משפט האיזומורפיזים הראשון נקבל את הדרוש.

<u>שאלה 2</u>

יהי R חוג ויהי I אידיאל של R הוכיחו כי $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר הומומורפיזים על $\varphi: M_n(R)\to M_n(R/I)$ ונראה שהגרעין הוא $M_n(I)$.

נסמן איבר ב $M_n(R)$ ע"י (r_{ij}). $\varphi((r_{ij}))=(r_{ij}+I)$. אם $(k_{ij})\in M_n(I)$ אז

$\varphi((k_{ij}))=(k_{ij}+I)=(I)=\underline{0}$, אם $(k_{ij})\notin M_n(I)$ אז קיימים $1\le i\le n,1\le j\le n$ כך ש $k_{ij}\notin I$

ולכן $\varphi((k_{ij}))=(k_{ij}+I)\neq\underline{0}$. קיבלנו ש $M_n(I)$ הוא הגרעין ולכן $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.

<u>שאלה 3</u>

יהי $f:R\to S$ הומומורפיזם של חוגים קומוטטיביים ויהי $I\lhd S$ ראשוני. הוכח כי $f^{-1}(I)$ ראשוני.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש $f^{-1}(I)$ לא אידיאל ראשוני, ז"א קיימים $a,b\notin f^{-1}(I)$ כך ש $ab\in f^{-1}(I)$.

מכיון ש $f:R\to S$ הומומורפיזם נקבל ש $f(a)\cdot f(b)=f(ab)$. מכיוון ש $a,b\notin f^{-1}(I)$ נקבל ש

$f(a),f(b)\notin I$ מכיון ש $ab\in f^{-1}(I)$ נקבל ש $f(ab)\in I$ בסתירה לכך ש I אידיאל ראשוני.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו כי $\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle\cong\mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle$.

<u>פתרון</u>

נגדיר את ההעתקה $\varphi:\mathbb{C}[x,y]\to\mathbb{C}[x,y]$ ע"י $\varphi(x):=x+iy,\varphi(y):=x-iy,\varphi(c)=c\in\mathbb{C}$.

ההעתקה הנ"ל היא איזומורפיזים. איזומורפיזים מעביר אידיאל ראשי לאידיאל ראשי ולכן

ולכן $\varphi\left(\langle xy-1\rangle\right)=\langle\varphi(xy-1)\rangle=\langle\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(1)\rangle=\langle x^2+y^2-1\rangle$

$$\mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle\cong\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle$$

<u>שאלה 5</u>

יהיו $\varphi:R\to S$ הומומורפיזם ו $I\lhd S$. נסמן: $I'=\varphi^{-1}(I)$ (ראינו ש $I'\lhd R$).

הראה ש $R/I'\cong(\mathrm{Im}(\varphi)+I)/I\subseteq S/I$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $\mathrm{Im}\,\varphi$ תת חוג של S. מכיוון ש $I\lhd S$ נקבל ש $(\mathrm{Im}\,\varphi\cap I)\lhd\mathrm{Im}\,\varphi$ נוכיח ש

$R/I'\cong\mathrm{Im}\,\varphi/\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$ נגדיר העתקה $\psi:R/I'\to\mathrm{Im}\,\varphi/\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$ ע"י

$\psi(r+I')=\varphi(r)+\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$. נוכיח ש ψ מוגדרת היטב, מספיק להוכיח שלכל $r\in R,j\in I'$ מתקיים $\psi(r+I')=\psi((r+j)+I')$.

$$\psi((r+j)+I')=\varphi(r+j)+\mathrm{Im}\,\varphi\cap I=\varphi(r)+\varphi(j)+\mathrm{Im}\,\varphi\cap I=\varphi(r)+\mathrm{Im}\,\varphi\cap I=\psi(r+I')$$

נוכיח ש ψ איזומורפיזים:

מכיוון ש $\varphi:R\to S$ הומומורפיזים נקבל ש ψ הומומורפיזים.

יהי $y+(\mathrm{Im}\,\varphi\cap I)\in\mathrm{Im}\,\varphi/\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$ מכיוון ש $y\in\mathrm{Im}\,\varphi$ קיים $x\in R$ כך ש $\varphi(x)=y$ ולכן

$\psi(x+I')=\varphi(x)+(\mathrm{Im}\,\varphi\cap I)=y+(\mathrm{Im}\,\varphi\cap I)$ ז"א ψ אפימורפיזים.

נשאר להוכיח מונומורפיזים - נניח ש $\ker\psi\neq\{0\}$ ז"א קיים $r\in R\setminus I'$ כך ש $\psi(r+I')=0$ אבל

$\psi(r+I')=\varphi(r)+(\mathrm{Im}\,\varphi\cap I)\to\varphi(r)\in I\to r\in I'$ בסתירה לכך ש $r\notin I'$.

$S\supseteq\mathrm{Im}\,\varphi$ תת חוג, $I\lhd S$ ועל פי משפט האיזומורפיזים השני $(\mathrm{Im}\,\varphi+I)/I\cong\mathrm{Im}\,\varphi/\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$ מכיוון

שהוכחנו ש $R/I'\cong\mathrm{Im}\,\varphi/\mathrm{Im}\,\varphi\cap I$ קיבלנו את הדרוש.

יהי $x\in(\mathrm{Im}\,\varphi+I)/I$ ז"א $x=(y+i)+I:y\in\mathrm{Im}\,\varphi,i\in I$ מכיוון ש $\mathrm{Im}\,\varphi\subseteq S$ אז $x=y+I\in S/I$