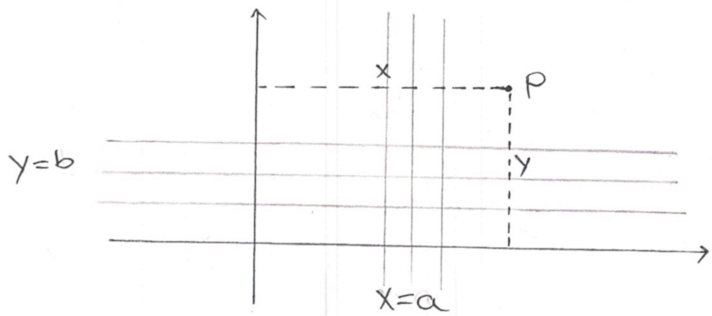
קואורדינטות - "יצוג נקודות במרחב n-מימדי באמצעות n-יה של מספרים."

P נקודה במישור $\mathbb{R}^2$

קואורדינטות **קרטזיות** (x,y)

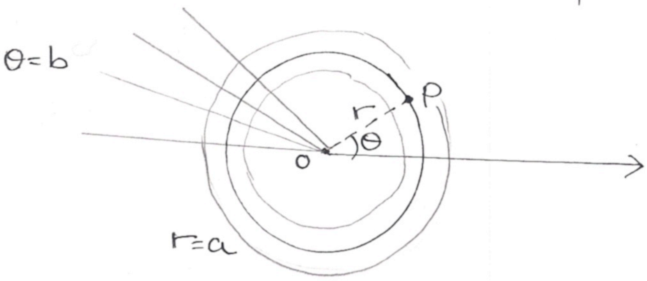


מקמים שני צירים מאונכים:

x - מרחק P מציר y $-\infty<x<\infty$

y - מרחק P מציר x $-\infty<y<\infty$

קואורדינטות **פולריות** (r,θ)



בוחרים נקודה שתהווה קטב (pole) וקרן היוצאת מהקוטב (polar ray)

r - מרחק P מהקוטב O $0\le r<\infty$

θ - הזווית שהרדיוס יוצר עם הכיוון "היחיובי" של הקרן ← לא מוגדרת בקטב O. $0\le\theta<2\pi$

קואורדינטות מגדירות רישות של המרחב ע"י **משפחי קואורדינטות**

היפר-מרחב (מימד n-1) המוגדר ע"י השוואת אחת הקואורדינטות לקבוע.

$x=a$ ישרים אנכיים, $y=b$ קווים אופקיים

$r=a$ מעגלים הנינים ברד' a

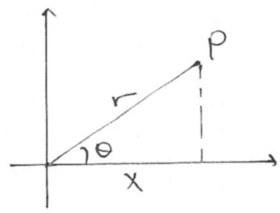
$\theta=b$ קרן מ-O שיוצרת זווית b.

נוסחאות מעבר בין קואורדינטות קרטזיות לקואורדינטות פולריות.

$(r,\theta) \rightarrow$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$



$(x,y) \rightarrow$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

* $y\ge 0 \Rightarrow 0\le\theta\le\pi$

$y<0 \Rightarrow \pi<\theta<2\pi$

$x=0 \Rightarrow$ $y>0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$, $y<0 \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$

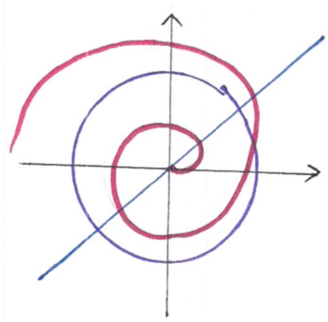
גיאומטריה אנליטית ← הצגת צורות גיאומטריות (עקומות, משטחים..) באמצעות משוואות אלגב' על הקואורדינטות

$r=6$

$r\sin\theta=r\cos\theta \rightarrow \tan\theta=1$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ $\theta=\frac{\pi}{4}+\pi$

$r=\theta$ ספירלת ארכימדס.



$x^2+y^2=6$

$y=x$

$\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

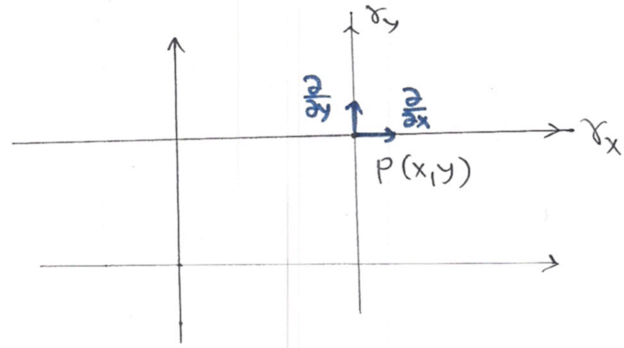
וקטורי השינוי בקואורדינטות - וקטורי הנגזרות של עקומות המוגדרות ע"י:

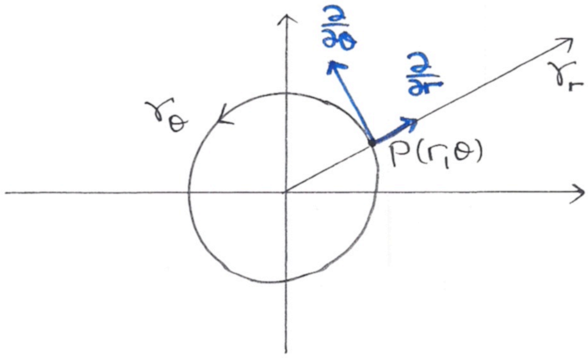
$\gamma_x(x)=(x,y)$ y קבוע ו-x משתנה

$\gamma_y(y)=(x,y)$ x קבוע ו-y משתנה

$\gamma_r=(r,\theta)$ θ קבועה ו-r משתנה

$\gamma_\theta=(r,\theta)$ r קבוע θ משתנה.





דרה:

$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{d\gamma_x}{dx}=(1,0)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{d\gamma_y}{dy}=(0,1)$

$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{d\gamma_r}{dr}=(1,0)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{d\gamma_\theta}{d\theta}=(0,1)$,

תרגיל: הצג באמצעות $\frac{\partial}{\partial y}$ ו $\frac{\partial}{\partial x}$ את הווקטורים $\frac{\partial}{\partial\theta}$ ו $\frac{\partial}{\partial r}$.

פתרון: נביע את γ_r ו γ_θ באמצעות הבסיס הקרטזי:

$\gamma_\theta(\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial}{\partial\theta}=(-r\sin\theta,r\cos\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial\theta}=(-y,x)=-y\cdot\frac{\partial}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial}{\partial y}$

זהו הווקטור המאונך ל-$p(x,y)$.

אורכו: $\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|=\sqrt{y^2+x^2}=r$

$\gamma_r(r)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{d\gamma_r}{dr}=(\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial r}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}$

וקטור בכיוון $p(x,y)$ ← מנורמל. $\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|=1$

(לא מוגדר ב-0)

עבור כל נקודה ב-$\mathbb{R}^2$ p הווקטורים $\frac{\partial}{\partial x}$ ו $\frac{\partial}{\partial y}$ זהים.

אבל, $\frac{\partial}{\partial\theta}$ ו $\frac{\partial}{\partial r}$ משנים את כיוונם עבור p-ים שונים ו $\frac{\partial}{\partial\theta}$ משנה את אורכו

כתלות במרחק מ-0.

$\frac{\partial}{\partial\theta}$ ו $\frac{\partial}{\partial r}$ תמיד מאונכים זה לזה.

קואורדינטות במרחב $\mathbb{R}^3$

קואורדינטות קרטזיות (x,y,z)

ממקמים 3 צירים מאונכים

x,y,z מרחקים מהמישורים שנפרשים ע"י הצירים

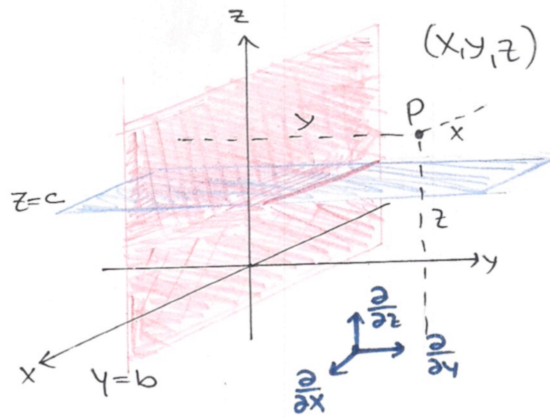
$-\infty < x,y,z < \infty$

משטחי קואורדינטות:

$x=a \qquad y=b \qquad z=c$

משטחים המקבילים למישורים:

$[xy] \qquad [xz] \qquad [yz]$



קואורדינטות גליליות - הכללה של קואורדינטות פולריות: (r,θ,z)

ממקמים ציר z

בכל מישור $z=const$ משתמשים בקואורדינטות פולריות כך שהקוטב הוא נק' החיתוך עם ציר z

z - מרחק ממישור $[xy]$

r - מרחק מציר ה-z

θ - זווית שנוצרת עם קרן מקבילה לx שנמצאת במישור

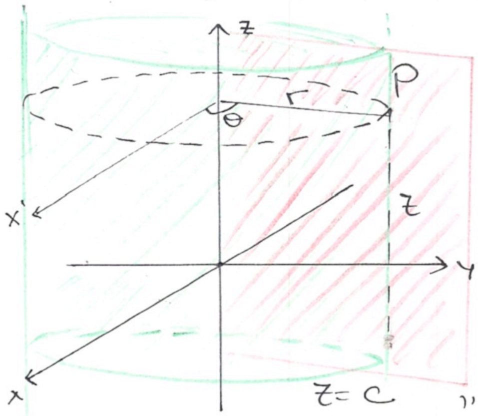
$0 \le \theta < 2\pi \qquad 0 \le r < \infty \qquad -\infty < z < \infty$

משטחי קואורדינטות:

$z=c$ מישור מקביל למישור $[xy]$

$r=b$ גליל שציר-z ורדיוס b

$\theta=a$ "חצי מישור" שנפרש ע"י ציר z וקרן הרדיוס.



נוסחאות מעבר בין קואורדינטות קרטזיות לקואורדינטות גליליות

$(r,\theta,z) \Leftarrow$

$z=z$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$(x,y,z) \Leftarrow$

$z=z$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\theta=\arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

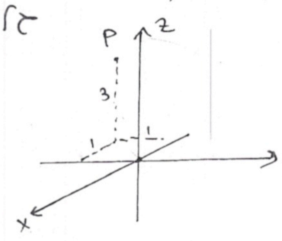
*

תרגיל: הנקודה $P(-1,-1,3)$ נתונה בקואורדינטות קרטזיות. מצא את שיעורי P בקואורדינטות גליליות.

$z=3 \qquad r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \qquad \theta=\arctg\left(\frac{-1}{-1}\right)=\arctg 1=\frac{\pi}{4}+\pi k$

x ו-y שליליים $\Leftarrow \quad \theta=\frac{5\pi}{4}$

$P=\left(\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi,3\right)$



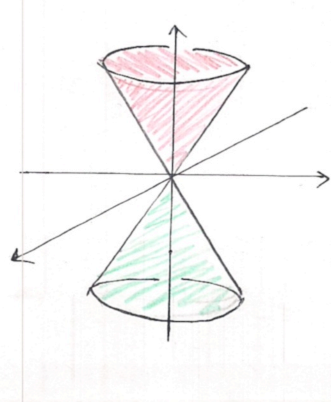
תרגיל: מצא את משוואתו של החרוט $z^2=x^2+y^2$ בקואורדינטות גליליות

$z=z$

$x=r\cos\theta \rightarrow \quad z^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$

$y=r\sin\theta$

$\boxed{z=r}$ או $\boxed{z=-r}$



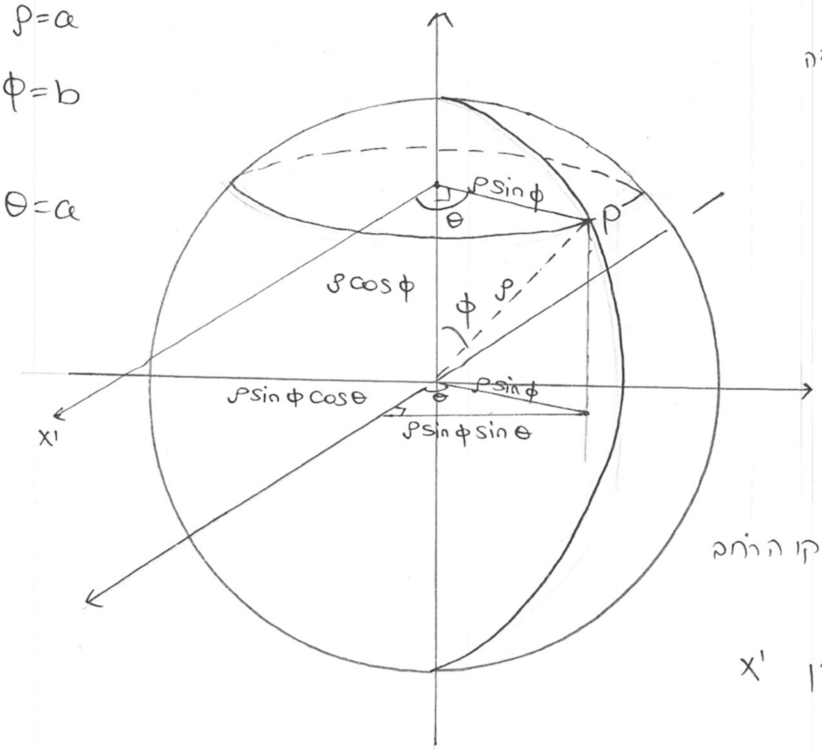
קואורדינטות ספריות (ρ,θ,ϕ)

משטחי קואורדינטות:

$\rho=a$ ספירה ברדיוס a.

$\phi=b$ חרוט היוצר זווית b עם ציר z

$\theta=a$ "חצי מישור" כמו בקואורדינטות גליליות.



ρ - מרחק מ-O $0\le\rho<\infty$

איך קובעים מיקום של נקודה על ספירה?

בעזרת קו אורך ורוחב

קביעת מיקום על קו אורך:

φ - זווית שהרדיוס ρ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר z

$0\le\phi\le\pi$

קביעת מיקום על קו הרוחב:

קובעים במישור $z=z_p$

חותך את הספירה לאורך קו הרוחב

$z_p=\rho\cos\phi$

θ - הזווית שנוצרת עם הציר X'

$0\le\theta<2\pi$

נוסחאות מעבר מקואורדינטות קרטזיות וגליליות

$(\rho,\theta,\phi)\leftarrow$

קרטזיות $\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$

גליליות $\begin{cases} z=\rho\cos\phi \\ r=\rho\sin\phi \\ \theta=\theta \end{cases}$

$\leftarrow(x,y,z)$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\phi=\arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$\leftarrow(r,\theta,z)$

$\rho=\sqrt{r^2+z^2}$

$\theta=\theta$

$\phi=\arctan\left(\frac{r}{z}\right)$

תרגיל: נתונה הנקודה $P(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})$ בקואורדינטות ספריות
מצא את הצגתה בקואורדינטות קרטזיות וגליליות.

$\theta=\frac{\pi}{2}$

$r=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\rightarrow P(\sqrt{3},\frac{\pi}{2},1)$

$z=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

$x=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}=0$

$y=2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}\rightarrow P(0,\sqrt{3},1)$

$z=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

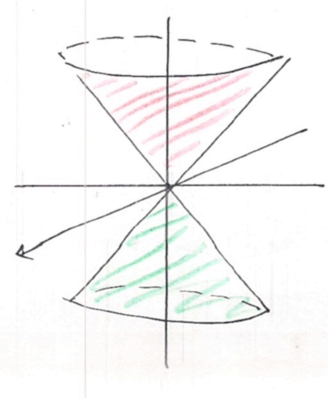
תרגיל: מצא את משוואתו של החרוט $z^2=x^2+y^2$ בקואורדינטות ספריות:

$(\rho\cos\phi)^2=(\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2=\rho^2\sin^2\phi$

$\tan^2\phi=1$

$\tan\phi=1$ או $\tan\phi=-1$

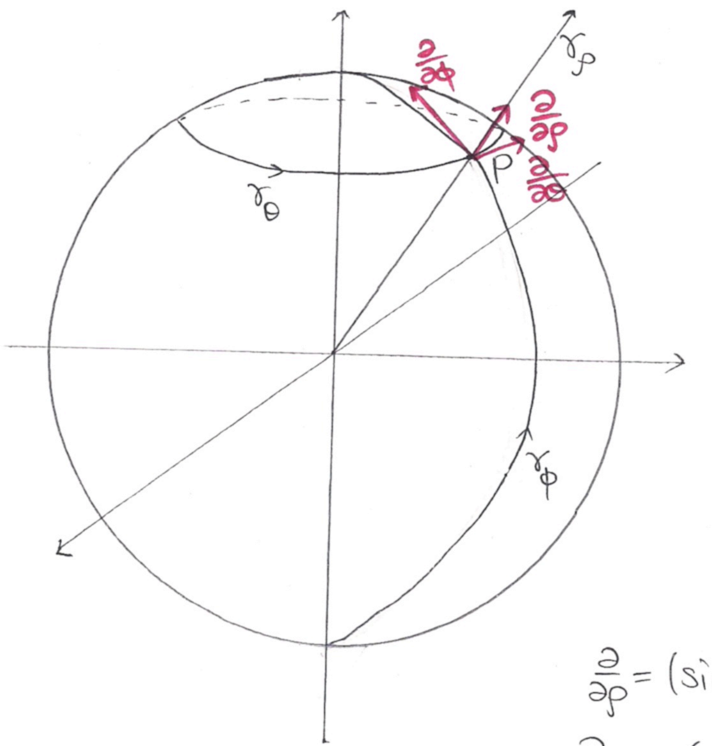
$\boxed{\phi=\frac{\pi}{4}}$ או $\boxed{\phi=-\frac{\pi}{4}}$



תרגיל: נבטא את הווקטורים $\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\phi}$ באמצעות $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$

(1) בקואורדינטות ספיריות (2) בקואורדינטות קרטזיות.

(2) הראה שהווקטורים אורתוגונליים וחשב את אורכם בנורמה אוקלידית.



עבור נק' P נגדיר עקומות שבהן רק קואורדינטה אחת משתנה

$$\gamma_\rho(\rho)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$

פרמטריזציה של הקרן שעוברת מ-O דרך P.

$$\gamma_\theta(\theta)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$

פרמטריזציה של קו הרוחב שעובר דרך P

$$\gamma_\phi(\phi)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$

פרמטריזציה של קו האורך שעובר דרך P.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\rho}\right|=1$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

וקטור $\vec{OP}$ מנורמל.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=(-\rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\sin\phi\cos\theta,\ 0)=(-y,\ x,\ 0) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\phi=r$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=(\underbrace{\rho\cos\phi}_{z}\cos\theta,\ \underbrace{\rho\cos\phi}_{z}\sin\theta,\ -\rho\sin\phi)=\left(\frac{z\cdot\overbrace{\rho\sin\phi\cos\theta}^{x}}{\underbrace{\rho\sin\phi}_{r}},\ \frac{z\,\overbrace{\rho\sin\phi\sin\theta}^{y}}{\underbrace{\rho\sin\phi}_{r}},\ \underbrace{-\rho\sin\phi}_{r}\right)$$

$$=\left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\phi}\right|^2=\frac{z^2x^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2y^2}{x^2+y^2}+x^2+y^2=z^2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)+x^2+y^2=\rho^2\rightarrow\left|\frac{\partial}{\partial\phi}\right|=\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{-x\cdot y}{\sqrt{\ }}+\frac{y\cdot x}{\sqrt{\ }}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\rho}\perp\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{-zxy}{\sqrt{\ }}+\frac{zyx}{\sqrt{\ }}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\phi}\perp\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{zx^2}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}+\frac{zy^2}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}-\frac{\sqrt{\ }\,z}{\sqrt{\ }}=\frac{z(x^2+y^2)-z(x^2+y^2)}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\perp\frac{\partial}{\partial\phi}$$

* $\frac{\partial}{\partial\phi}$ לא מוגדר עבור נק' על ציר z. $\frac{\partial}{\partial\rho}$ לא מוגדר עבור נקודה O.