פתרון תרגיל 10 – מבוא לאנליזה 1

1. לאילו ערכי a,b הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geq 0\\ x^2+ax+b & x<0\end{cases}$$

גזירה לכל x?

פתרון: בכל נקודה $x\neq 0$ הפונקציה גזירה (כפונקציה מעריכית או פולינום). באשר לנקודה $x=0$, תחילה נבדוק לגבי רציפות (שהיא הכרחית עבור גזירות). רציפות מימין ב־$x=0$ מובטחת, כיוון ש־$f(x)=e^x$ ב־$[0,\infty)$. באשר לגבול השמאלי:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+ax+b)=0^2+a\cdot 0+b=b$$

(השוויון הלפני אחרון בגלל שהפולינום x^2+ax+b רציף ב־$x=0$). לכן על מנת ש־$f(x)$ תהיה רציפה ב־$x=0$ יש לדרוש $b=f(0)=e^0=1$, ז"א $\boldsymbol{b=1}$.

כעת נבדוק גזירות ב־$x=0$:

בקרן $[0,\infty)$, $f(x)=e^x$, לכן הנגזרת החד־צדדית הימנית של $f(x)$ ב־$x=0$ היא

$$f'_+(0)=(e^x)'(0)=e^0=1$$

בקרן $(-\infty,0]$, $f(x)=x^2+ax+1$ (שימו לב שניתן לצרף את $x=0$ בקצה הימני של הקרן כי בנקודה זו הפולינום אכן מקבל את הערך $f(0)=e^0=1$). לכן הנגזרת החד־צדדית הימנית של $f(x)$ ב־$x=0$ היא

$$f'_-(0)=(x^2+ax+1)'(0)=2\cdot 0+a=a$$

על מנת ש־$f(x)$ תהיה גזירה ב־$x=0$ הכרחי ומספיק שהנגזרות החד־צדדיות שם יהיו שוות, ז"א $\boldsymbol{a=1}$.

2. (א) הוכיחו שאם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ו־$g(x)$ אינה גזירה בנקודה x_0, אז $h(x)=f(x)+g(x)$ אינה גזירה בנקודה x_0.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$h(x)$ גזירה ב־x_0. אז $f(x)$ ו־$h(x)$ גזירות ב־x_0. אבל אז נקבל שגם $g(x)=h(x)-f(x)$ גזירה ב־x_0 כהפרש של פונקציות הגזירות שם:

$$g'(x_0)=(h-f)'(x_0)=h'(x_0)-f'(x_0)$$

בסתירה לכך ש־g אינה גזירה ב־x_0.

(ב) תנו דוגמא לשתי פונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ שאינן גזירות בנקודה x_0, אך $h(x)=f(x)+g(x)$ גזירה בנקודה x_0.

פתרון: דוגמא אחת שאפשר לתת היא

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ 1 & x=x_0\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ -1 & x=x_0\end{cases}$$

אז $f(x)$ ו־$g(x)$ לא רציפות בנקודה x_0 ולכן ודאי לא גזירות ב־x_0. אבל $h(x)=f(x)+g(x)=0$ היא הפונקציה הקבועה 0 אשר גזירה בכל נקודה, $h'(x)=0$.

3. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת, הפיכה ורציפה בקטע $(0,2)$, $f(1)=5$ ו־$f'(1)=3$. הוכיחו כי הפונקציה ההופכית f^{-1} גזירה בנקודה $x=5$ ומצאו את $(f^{-1})'(5)$.

פתרון: $f(x)$ מוגדרת, הפיכה ורציפה בסביבה $(0,2)$ של $x_0=1$. בנוסף, $y_0=f(x_0)=f(1)=5$ וכן $f'(x_0)=f'(1)=3\neq 0$. לכן לפי המשפט אודות הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, מתקיים כי f^{-1} גזירה בנקודה $x=5$, ומתקיים

$$(f^{-1})'(5)=(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

4. הפונקציות f,g,h גזירות ומקיימות $h(x)=f(g(x))=e^{4x+1}$, $g(0)=1$ ו־$g'(0)=4$. מהי $f'(1)$?

הדרכה: חשבו את $h'(0)$ בשתי דרכים - בעזרת חישוב ישיר, ובעזרת כלל השרשרת.

פתרון: נחשב את $h'(0)$ בשתי דרכים.

חישוב ישיר: $h(x)=e^{4x+1}$ ולכן $h'(x)=4e^{4x+1}$ ולכן $h'(0)=4e^{4\cdot 0+1}=4e$.

מצד שני $h(x)=f(g(x))$, לכן לפי כלל השרשרת:

$$h'(0)=f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(1)\cdot 4=4f'(1)$$

נשווה ונקבל $4f'(1)=4e$, ומכאן $\boldsymbol{f'(1)=e}$.

5. מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים (גלובליים) עבור

(א) $f(x)=x^3-3x^2-9x+35$ בקטע $[-4,4]$.

פתרון: $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[-4,4]$, לכן לפי המשפט השני של ויירשטראס מקבלת שם מינימום ומקסימום מוחלטים. כיוון ש־$f(x)$ גזירה בכל נקודה, הנקודות החשודות לקיצון הן אלו בהן $f'(x)=0$ ונקודות הקצה $x=\pm 4$. נשים לב:

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$$

והיא מתאפסת כאשר $x=3$ או $x=-1$. נבדוק את הערכים בכל הנקודות החשודות:

$$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+35=-1-3+9+35=40$$

$$f(3)=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+35=8$$

$$f(-4)=(-4)^3-3\cdot(-4)^2-9\cdot(-4)+35=-64-48+36+35=-41$$

$$f(4)=4^3-3\cdot 4^2-9\cdot 4+35=64-48-36+35=15$$

ובסה"כ נסיק שיש **מינימום מוחלט בנקודה $\boldsymbol{(-4,-41)}$, מקסימום מוחלט בנקודה $\boldsymbol{(-1,40)}$.**

(ב) $f(x)=|3x-2|$ בקטע $[-1,1]$.

פתרון:נשים לב שהפונקציה שלנו בעצם נתונה ע"י

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & \frac{2}{3}\le x\le 1\\ 2-3x & -1\le x<\frac{2}{3}\end{cases}$$

והיא רציפה בקטע $[-1,1]$ (קל לוודא שהיא אכן רציפה ב־$x=\frac{2}{3}$), לכן לפי המשפט השני של ויירשטראס מקבלת שם מינימום ומקסימום מוחלטים. עבור $x\neq\frac{2}{3}$ ניתן לגזור ולקבל

$$f'(x)=\begin{cases}3 & \frac{2}{3}<x<1\\ -3 & -1<x<\frac{2}{3}\end{cases}$$

והנגזרת לא מתאפסת כלל. לכן נותר לבדוק את נקודות הקצה $x=\pm1$, ואת הנקודה $x=\frac{2}{3}$ שבה יש חשד לאי־גזירות (למעשה זהו לא רק חשד, שכן הנגזרות החד־צדדיות בנקודה זו שונות, אבל אין צורך לוודא זאת– אפשר לכלול את $x=\frac{2}{3}$ כחשודה לקיצון רק על סמך החשד לאי־גזירות בה). הערכים בנקודות החשודות:

$$f(-1)=2-3\cdot(-1)=5$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{2}{3}-2=0$$

$$f(1)=3\cdot1-2=1$$

לכן נסיק כי לפונקציה **מינימום מוחלט בנקודה $\left(\frac{2}{3},0\right)$, מקסימום מוחלט בנקודה $(-1,5)$**.