פתרון תרגיל בית 11 – טופולוגיה

שאלה 1

יהי (X,d) מ"מ. $A,C\subseteq X$ לא ריקות. C קומפקטי, A סגורה . הוכיחו:

$d(C,A)=0\Leftrightarrow C\cap A\neq\varnothing$.

פתרון

ניעזר בלמה שהוכחנו בתרגול (מותר להסתמך עליה בהנחה שמציינים שהוכחנו בתרגול).

למה: יהי (X,d) מ"מ, $A,C\subseteq X$ לא ריקות כך ש C ת"מ קומפקטי אזי: קיים $c_0\in C$ כך ש $d(C,A)=d(c_0,A)$.

הוכחת הלמה: הפונקציה $\varphi:C\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x)=d(x,A)$ היא ליפשיץ-1 ובפרט רציפה. C קומפקטי ולכן φ מקבלת מינימום בפרט: קיים $c_0\in C$ כך ש $d(c_0,A)=\varphi(c_0)=\inf\{d(c,A):\ \ c\in C\}=d(C,A)$.

מש"ל למה

נוכיח כעת שאם (X,d) מ"מ, $A,C\subseteq X$ לא ריקות C ת"מ קומפקטי, A סגורה ב X אזי:

$d(C,A)=0\Leftrightarrow C\cap A\neq\varnothing$.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ $d(C,A)=\inf\{d(c,a):\ \ c\in C,\ \ a\in A\}$. ברור ש $d(C,A)\geq 0$ מצד שני $C\cap A\neq\varnothing$ ולכן קיים $c_0\in C\cap A$ נקבל ש

$0=d(c_0,c_0)\geq\inf\{d(c,a):\ \ a\in A\}=d(C,A)$. בסה"כ $d(C,A)=0$.

$(\Rightarrow)$ עפ"י הלמה קיים $c_0\in C$ כך ש $d(C,A)=d(c_0,A)$. מכיון ש $d(C,A)=0$ נקבל ש $d(c_0,A)=0$ ומכאן $c_0\in cl(A)=A$ (A סגורה). לכן, $c_0\in C\cap A$ ו $C\cap A\neq\varnothing$.

שאלה 2

יהיו (X_i,τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i\in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי?

<u>רמז</u>: תלוי.

<u>פתרון</u>

מקרה ראשון: באוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה $X=\prod_{i\in I} X_i$ אינו דיסקרטי. נראה שלמעשה אף נקודון אינו פתוח. נניח בשלילה שקיים נקודון $\{x\}$ פתוח. אם הוא פתוח, אזי ניתן לבטא אותו כאיחוד של קבוצות בסיסיות. מכיוון ש- $|\{x\}|=1$, ניתן להסיק שקיימת B בסיסית כך ש- $B=\{x\}$. מכיוון שבאוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת, ומצד שני, קיים לכל היותר מספר סופי של אינדקסים i כך ש- $p_i(B)\neq X_i$ (לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה), נקבל שקיים $i_0\in I$ כך ש- $p_{i_0}(B)=X_{i_0}$ וכן $|X_{i_0}|>1$, בסתירה לכך ש- $|p_{i_0}(B)|=1$.

מקרה שני: באוסף $\{X_i\}$ יש לכל היותר מספר סופי של אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה כל נקודון ב- X הוא קבוצה בסיסית (הסבר: לכל $i\in I$, פרט למספר סופי, $p_i(\{x\})=X_i$). לכן, במקרה זה X הינו דיסקרטי.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.

<u>פתרון</u>

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה $X\times X$ הוא מטריזבילי, לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה $d_{\max}$, כלומר מהמטריקה $d_{\max}:(X\times X)\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d_{\max}((x,y),(t,s))=\max\{d(x,t),d(y,s)\}$. נראה שהפונקציה רציפה לפי $d_{\max}$

ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה (x,y). צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}((x,y),(t,s))<\delta$ אז $|d(x,y)-d(t,s)|$.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. אזי אם $d_{\max}((x,y),(t,s))<\delta$ מתקיים

$$|d(x,y)-d(t,s)|\le d(x,t)+d(y,s)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

שימו לב: אי השוויון $|d(x,y)-d(t,s)|\le d(x,t)+d(y,s)$ נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה d (איך?).

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i\in I}X$. לכל $x\in X$ נגדיר $f_x\in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x. נסמן $Y=\{f_x\mid x\in X\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I. הוכיחו כי X הומיאומורפי ל Y.

<u>פתרון</u>

תהי $g:X\to Y$ מוגדרת ע"י $g(x)=f_x$. פונקציה זו רציפה שכן מתקבלת כצמצום הטווח של הפונקציה הרציפה $g:X\to\prod_{i\in I}X$ (המוגדרת על-ידי $g(x)=f_x$). אכן, הפונקציה האחרונה רציפה לפי קריטריון לרציפות פונקציה לתוך מרחב מכפלה, שכן היא רציפה רכיב-רכיב (בכל רכיב מדובר בפונקציית הזהות).

תזכורת: $g:X\to\prod_{i\in I}X$ רציפה אם ורק אם $p_i\circ g:X\to X$ רציפה לכל $i\in I$.

אבל לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g(x)=p_i(f_x)=x$ כלומר לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g=Id_X$ ופונקציית הזהות כמובן רציפה ממ"ט לעצמו.

נקבע $i_0\in I$. קל לראות שההופכית של $g:X\to Y$ היא הפונקציה $p_{i_0}:Y\to X$ שמתקבלת מצמצום התחום של פונקציית ההטלה הרציפה $p_{i_0}:\prod_{i\in I}X\to X$. לכן נקבל ש- g הוא הומיאומורפיזם מ- X ל- Y.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1.

<u>פתרון</u>

נניח שלכל $i \in I$ X_i הוא מרחב T_1 ונוכיח ש- $\prod_{i \in I} X_i$ הוא מרחב T_1. שקול להוכיח שכל נקודון סגור ב- $\prod_{i \in I} X_i$.

יהי $\prod_{i \in I} \{x_i\}$ נקודון. נראה שהמשלים שלו פתוח. מתקיים:

$$\bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} Y_{j,i} = \left(\prod_{i \in I} \{x_i\} \right)^C$$ כאשר

$$Y_{j,i} = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ X_j \setminus \{x_j\} & j = i \end{cases}.$$

<u>הערה</u>: כדי להבין טוב יותר את החישוב הנ"ל התבוננו במכפלה סופית ושכנעו את עצמכם שזוהי הצורה הכללית של המשלים של נקודון במרחב מכפלה.

כעת, מכיון שכל המרחבים הנתונים הם T_1 אז בהכרח לכל $i, j \in I$ מתקיים ש- $Y_{j,i}$ פתוחה ב- X_j. מכאן, לכל $i \in I$ $\prod_{j \in I} Y_{j,i}$ פתוחה בסיסית במרחב המכפלה ולכן $\bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} Y_{j,i} = \left(\prod_{i \in I} \{x_i\} \right)^C$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X \times X$ להיות $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. הראו שאם Δ סגור ב- $X \times X$ אזי X הוא האוסדורף. [שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.]

<u>פתרון</u>

נניח שהאלכסון Δ סגור ב $X \times X$ ונניח בשלילה ש- X אינו האוסדורף. אז קיימות $a \neq b \in X$ כך **שלכל** U, V סביבות פתוחות של a, b בהתאמה ,

$U \cap V \neq \varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U \times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגית המכפלה) מתקיים $(U \times V) \cap \Delta \neq \varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b) \in \overline{\Delta}$ (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש $(a,b) \notin \Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

מש"ל