מבוא לאלגברה לינארית 89־119,
מועד א', סמסטר א' תשע"ט

- מרצה: אחיה בר־און. מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
- קורס: מבוא לאלגברה לינארית $89119 - 01$.
- תאריך: י"ט שבט התשע"ט, $25/1/2019$.
- משך המבחן: 3 שעות.
- חומר עזר: מחשבון.
- הוראות: לפניכם 5 שאלות ו 10 סעיפים (כל שאלה בת שתי סעיפים). יש לענות על כולם. <u>על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.</u>
- ניקוד: כל סעיף 10 נקודות.
ככל אצבע, דרך נכונה ומנומקת שווה 5 נקודות ותשובה סופית נכונה המתבססת על דרך נכונה שווה 5 נקודות.
5 נקודות ירדו על תשובה סופית ללא דרך מנומקת וכל שכן ש 5 נקודות ירדו על תשובה סופית שגויה (ללא תלות בסיבת הטעות).

בהצלחה!

.1

(א) נתונה מערכת משוואות לינארית התלויה בפרמטר a

$$\begin{aligned} x_1+x_2+ax_3 &= 1\\ ax_1+3x_2-x_3 &= -2\\ 3x_1+4x_2+x_3 &= 2 \end{aligned}$$

מצאו ונמקו לאילו ערכי a למערכת פתרון יחיד? לאילו ערכי a למערכת אינסוף פתרונות? ולאילו ערכי a למערכת אין פתרון?

פתרון: נייצג את המערכת בעזרת מטריצה ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ a & 3 & -1 & -2\\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 3-a & -1-a^2 & -2-a\\ 0 & 1 & 1-3a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 1-3a & -1\\ 0 & 3-a & -1-a^2 & -2-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+(a-3)R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 1-3a & -1\\ 0 & 0 & -1-a^2+(1-3a)(a-3) & 1-2a \end{array}\right)$$

במידה ו $-1-a^2+(1-3a)(a-3)=-4a^2+10a-4\neq 0$, נקבל כי זוהי צורה מדורגת ואין משתנים חופשיים ואין שורת סתירה ולכן יש פתרון יחיד. נבדוק מתי $-4a^2+10a-4=0$. זה קורה עבור הערכים $\frac{-10\pm\sqrt{100-64}}{-8}=$ $\frac{-10\pm 6}{-8}=2,0.5$ ולכן עבור $a\neq 2,0.5$ יש פתרון יחיד.

עבור $a=2$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון.

עבור $a=0.5$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0.5 & 1\\ 0 & 1 & -0.5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי (המשתנה השלישי) ולכן יש אינסוף פתרונות.

(ב) עבור $a=10$ כתבו את כל הפתרונות למערכת

$$\begin{aligned} x_1+x_2+ax_3 &= 0\\ ax_1+3x_2-x_3 &= 0\\ 3x_1+4x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(אם אין פתרון, כיתבו "אין פתרון למערכת").פתרון: את המערכת של סעיף א' אפשר לייצג כ $Ax=b$ כאשר $b=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&1&a\\a&3&-1\\3&4&1\end{pmatrix}$. הפתרון של סעיף א' הראה כי עבור $a=10$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד. כיוון ש A ריבועית זה אומר שהיא הפיכה. לכן למערכת $Ax=0$ (המערכת של סעיף ב') יש גם פתרון יחיד (עבור $a=10$). כיוון ש $x=0$ הוא פתרון למערכת של סעיף ב' אז נקבל כי $x=0$ הוא הפתרון היחיד.

2. נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\2&7&7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

(א) האם A הפיכה? במידה וכן, מצאו A^{-1}.
פתרון: נדרג את המטריצה $(A|I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\2&7&7&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&4&3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&0&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

לכן לפי האלגורתים שהוצג בכיתה, כיוון שהגענו למטריצת היחידה מצד שמאל אז המטריצה שמופיע מצד ימין היא ההפוכית. כלומר:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&0&-3\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

.

(ב) חשבו את $|A|$ (הדטרמיננטה של A) . האם קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש $|\alpha A|=10$? אם כן, מצאו α כזאת.
פתרון: כל פעולות הדירוג שביצענו בסעיף הקודם לא משנים את הדט' . ע"י פעולות אלו דירגנו את A למטריצה I ולכן

$$|A|=|I|=1$$

בנוסף כיוון ש $|\alpha A|=\alpha^3|A|$ (כי זה מטריצה 3×3) נקבל כי אם נבחר $\alpha=\sqrt[3]{10}$ נקבל כי

$$|\alpha A|=\alpha^3|A|=10\cdot1=10$$

כנדרש.

3. נתונה $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ תת הקבוצה של $\mathbb{R}^3$ כאשר

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(א) מצאו בסיס ל $span(S)$.
פתרון: נגדיר מטריצה A שעמודותיה הם הוקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 ונקבל כי

$span(S) = C(A)$ (כאשר $C(A)$ הוא מרחב העמודות של A) נמצא בסיס $C(A)$ לפי אלגוריתם שהוצג בכיתה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת של A ובעמודות מספר $1,2,3$ יש צירים לכן בסיס למרחב העמודות הוא עמודות מספר $1,2,3$ במטריצה A כלומר. בסיס ל $C(A)$ הוא $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ב) האם $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של וקטורי S? אם כן, מצאו את הצירוף הלינארי, כלומר מצאו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = v.$$

פתרון: כיוון ש v_1, v_2, v_3 הם 3 וקטורים בת"ל ב $\mathbb{R}^3$ הם בסיס. בפרט הם קבוצה פורשת ולכן כל וקטור ב $\mathbb{R}^3$ הוא צירוף לינארי שלהם ובפרט v הנתון בשאלה. נמצא את הצירוף הלינארי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

ולכן

$$1.5v_1 + 1v_2 + 0.5v_3 = v$$

בפרט ניתן לבחור $\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0$ ולקבל את המבוקש.

4. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

וידוע כי 2 ערך עצמי שלה.

(א) האם A לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה P הפיכה ו D אלכסונית כך ש $P^{-1}AP = D$.

פתרון: ראשית נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x) = \left|\begin{pmatrix} x-4 & 3 & 3 \\ -3 & x+2 & 3 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x-1 & -x+1 & 0 \\ -3 & x+2 & 3 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & x+2 & 3 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}\right| =$$

$$(x-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & 3 \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-1)\left|\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-1)\,(x-1)\,(x-2)$$

ולכן הע"ע הם $2,1$. נחשב את המרחבים העצמיים:

$$A{-}1I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_1 = N(A{-}1I) = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} : \, t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בנוסף

$$A{-}2I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_2 = N(A-2I) = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} : \, t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסה"כ קיבלנו 3 ו"ע בת"ל ואם נשים אותם במטריצה P, כלומר

$$,P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) הוכיחו כי 4 ערך עצמי של A^2 (כאשר המטריצה A^2 היא המטריצה $A \cdot A$).

פתרון: ראינו כי $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ע"ע של 2 עבור A. כלומר $Av = 2v$

ולכן

$$AAv = A\,(2v) = 2Av = 2 \cdot 2v = 4v$$

ומכאן ש 4 ע"ע של AA (עם ו"ע v).

5. נתונים הוקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו וקטור v_3 שונה מוקטור האפס המקיים $v_3 \in \{v_1, v_2\}^\perp$.

פתרון: מתקיים כי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \{v_1, v_2\}^\perp$ אמ"מ

$$-x + y - z = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0$$

$$2x + y - z = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v_2 \right\rangle = 0$$

נפתור את המערכת המתקבלת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

שפתרונה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

ונבחר פתרון שונה מאפס, למשל $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ב) נגדיר $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ מטריצה מגודל 3×3 שהעמודה הראשונה שלה היא v_1, העמודה השניה שלה היא v_2 והעמודה השלישית שלה היא v_3. מצאו את הדרגה של $A^t A$ (כלומר מצאו את $\text{rank}(A^t A)$).

תזכורת: $A^t \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ היא המטריצה המשוחלפת של A המוגדרת ע"י $[A^t]_{i,j} = A_{j,i}$.

פתרון: נחשב

$$A^t A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שדרגתה 3.