מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1 (פתרון)

1. יהיו A, B, C תת קבוצות של הקבוצה X.
<u>הוכיחו/הפריכו</u> שארבעת הטעינות הבאות <u>שקולות</u>
(זאת אומרת, כולן מתקיימות או כולן לא מתקיימות):
1) $A \subseteq B$
2) $A \cap B = A$
3) $A \cup B = B$
4) $B^c \subseteq A^c$

<u>פתרון</u>
נוכיח את השקילות הטענות על ידי השרשרת הלוגית:
2) ⇐ 1) ⇐ 3) ⇐ 4) ⇐ 2).

<u>2) ⇐ 1)</u>

$$x \in B \Leftarrow x \in A \wedge x \in B \overset{(2}{\Leftarrow} x \in A$$

<u>1) ⇐3).</u>

<u>$A \cup B \supseteq B$</u> : $x \in A \cup B \Leftarrow x \in B$ לפי הגדרת האיחוד.
<u>$B \supseteq A \cup B$</u>: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$. אם $x \in B$ הכל הוכח.
אם $x \in A$, אז לפי 1) - $x \in B$.

<u>3) ⇐4)</u> $x \in A^c \Leftarrow x \notin A \overset{(3}{\Leftarrow} x \notin B \Leftarrow x \in B^c$

4<u>) ⇐2)</u>
<u>$A \cap B \supseteq A$</u> : יהיה $x \in A$.
אם $x \in B$, אז $x \in A \cap B \Leftarrow x \in A \wedge x \in B$
אם $x \notin B$ אז $x \notin A \Leftarrow x \in A^c \overset{(4}{\Leftarrow} x \in B^c$ ⇐סתירה.
<u>$A \cap B \subseteq A$</u> : לפי הגדרת החיתוך:
$$x \in A \Leftarrow x \in A \wedge x \in B \Leftarrow x \in A \cap B$$

2. יהיו $g: A \to B, f: B \to C$ פונקציות.
<u>הוכיחו/ הפריכו:</u>
א' אם $f \circ g$ היא חח"ע, אז g היא חח"ע.
ב' אם $f \circ g$ היא על, אז f היא על.

<u>פתרון</u>
א' תהי $f \circ g$ חח"ע. נניח <u>בשלילה</u> ש-g היא לא חח"ע. אזי קיימים $x, y \in A$ כך ש- $x \neq y$ ו- $g(x) = g(y)$. מכאן מקבלים:
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\big(g(y)\big) = f \circ g(y) \Leftarrow f \circ g$ היא לא חח"ע.
סתירה.

ב' תהי $f \circ g$ היא על ויהיה $y \in C$. אז קיים x:
$x \in A$, $f \circ g(x) = y$. אבל $f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$. לכן f היא על.

3. תיהי: $f: A \to B$ פונקציה ו- $C \subseteq B$, ו- $D \subseteq A$.
אי הוכיחו ש-$f\big(f^{-1}(C)\big) \subseteq C$ ו- $f^{-1}\big(f(D)\big) \supseteq D$
ב' הוכיחו ש-$f\big(f^{-1}(C)\big) = C$ אם f פונקצית על
ו- $f^{-1}\big(f(D)\big) = D$ אם f פונקציה חח"ע.
ג' תנו דוגמאות נגדיות כאשר $f^{-1}\big(f(D)\big) \supset D$

פתרון
א'
<u>$f\big(f^{-1}(C)\big) \subseteq C$. הוכחה.</u>
יהיה $y \in f\big(f^{-1}(C)\big)$. אזי קיים $x \in f^{-1}(C)$ כך ש- $f(x) = y$.
אבל $x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$.
קיבלנו: $y = f(x) \in C$.
זאת אמרת: $y \in f\big(f^{-1}(C)\big) \Rightarrow y \in C$. ■

<u>$f^{-1}\big(f(D)\big) \supseteq D$ הוכחה.</u>
$x \in D \Rightarrow f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(D))$.
שתי הגרירות – לפי הגדרות של תמונה ותמונה הפוכה. ■

ב'

$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ אם f פונקצית על

נוכיח קודם ש- $f\left(f^{-1}(C)\right) \supseteq C$.

הוכחה. נניח $y \in C$. כיוון ש-f פונקצית על קיים $x \in X$ כך ש-$f(x) = y$.

אזי $x \in f^{-1}(C)$ לפח הגדרת תמונה הפוכה ו- $y \in f\left(f^{-1}(C)\right)$. לכן $f\left(f^{-1}(C)\right) \supseteq C$. אבל לפי א' מתקיים גם $f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$ ■

$f^{-1}\left(f(D)\right) = D$ אם f פונקציה חח"ע

נוכיח קודם ש- $f^{-1}\left(f(D)\right) \subseteq D$.

הוכחה. נניח $x \in f^{-1}\left(f(D)\right)$ אזי $f(x) \in f(D)$. לכן קיים $x' \in D$ כך ש- $f(x') = f(x)$. אבל מכיוון ש- f פונקציה חח"ע $x = x' \in D$.

לכן $f^{-1}\left(f(D)\right) \subseteq D$.

אבל לפי א' מתקיים גם $f^{-1}\left(f(D)\right) \supseteq D$. אזי $f^{-1}\left(f(D)\right) = D$ ■

ג'. תהי $f: \{0,1\} \to \{0\}$ פונקציה ו-$D = \{0\}$.

אזי $f^{-1}\left(f(D)\right) = \{0,1\} \supset \{0\} = D$. ■

4. יהיו $X.Y$ קבוצות $A, B \subseteq X;\ C, D \subseteq Y$ - תת קבוצות, $A_\alpha(\alpha \in I)$ ו- $B_\beta(\beta \in J)$ משפחות תת קבוצות ב-X, ו- $f: X \to Y$ - פונקציה.

הוכיחו:

א' $\left(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq B \Longrightarrow \left(\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq B\right)$

הוכחה. יהי מתקיים $\left(\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq B\right)$ (*)

ויהי $x \in \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. אזי קיים $\alpha_0 \in I$ כך ש- $x \in A_{\alpha_0}$. אז

לפי (*): $A_{\alpha_0} \subseteq B$ ו- $x \in B$. ■

ב' $\left(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \supseteq B \Longrightarrow \left(\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \supseteq B\right)$

הוכחה. יהי מתקיים $\left(\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \supseteq B\right)$ (**)

ויהי $x \in B$. אזי לפי (**) לכל $\alpha \in I$ $x \in A_\alpha$.

אז $x \in \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$. ■

ג' $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

<u>הוכחה.</u>

$x \in (\cup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c \Leftrightarrow x \notin \cup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow$
$\forall\alpha \in I: x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in I: x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

אזי $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c \subseteq \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

ד' $(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

<u>הוכחה.</u>

$x \in (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c \Leftrightarrow x \notin \cap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow$
$\exists\alpha \in I: x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha \in I: x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

ה' $B \cup (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in I} (B \cup A_\alpha)$

<u>הוכחה.</u>

$x \in B \cup (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in B \lor x \in \cap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow$
$x \in B \lor \forall\alpha \in I: x \in A_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in I: (x \in B \lor x \in A_\alpha) \Leftrightarrow$
$\forall\alpha \in I: (x \in B \cup A_\alpha) \Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in I} (B \cup A_\alpha)$

ו' $B \cap (\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in I} (B \cap A_\alpha)$

<u>הוכחה.</u>

$x \in B \cap (\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \Leftrightarrow x \in B \land x \in \cup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow$
$x \in B \land \exists\alpha \in I: x \in A_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha \in I: (x \in B \land x \in A_\alpha) \Leftrightarrow$
$\exists\alpha \in I: (x \in B \cap A_\alpha) \Leftrightarrow x \in \cup_{\alpha\in I} (B \cap A_\alpha)$

ז' $\boldsymbol{(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \cup \left(\cap_{\beta\in J} B_\beta\right) = \cap_{\alpha\in I,\beta\in J} (A_\alpha \cup B_\beta)}$

נסמן $B = \cap_{\beta\in J} B_\beta$ ונשתמש ב-'ה'. מקבלים:

$(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \cup \left(\cap_{\beta\in J} B_\beta\right) = \cap_{\alpha\in I} \left(A_\alpha \cup \left(\cap_{\beta\in J} B_\beta\right)\right)$. (***)

לאחר מכן נשתמש שוב ב-'ה' ונקבל

לכל $\alpha \in I$: $A_\alpha \cup \left(\cap_{\beta\in J} B_\beta\right) = \cap_{\beta\in J} (A_\alpha \cup B_\beta)$ נציב את זה ל-(***)

ונקבל: $(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \cup \left(\cap_{\beta\in J} B_\beta\right) = \cap_{\alpha\in I} \left(\cap_{\beta\in J} (A_\alpha \cup B_\beta)\right)$. מכן לפי אסוציאטיביות (קחבוצית) של פעולת החיתוך מקבלים סופית את השיוויון הנדרש.

ח' $\left(\bigcup_{\boldsymbol{\alpha\in I}} \boldsymbol{A_\alpha}\right) \cap \left(\bigcup_{\boldsymbol{\beta\in J}} \boldsymbol{B_\beta}\right) = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha\in I,\beta\in J}} \left(\boldsymbol{A_\alpha} \cap \boldsymbol{B_\beta}\right)$

נסמן $B = \bigcup_{\beta\in J} B_\beta$ ונשתמש ב-'ו'. מקבלים:

$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \left(A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right)\right)$. (****)

לאחר מכן שוב נשתמש ב-'ו' ונקבל

לכל $\alpha \in I$: $A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta\in J} \left(A_\alpha \cap B_\beta\right)$ נציב את זה ל-(****)

ונקבל: $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \left(\bigcup_{\beta\in J} \left(A_\alpha \cap B_\beta\right)\right)$. מכן לפי אסוציאטיביות (קחבוצית) של פעולת האחוד מקבלים סופית את השיוויון הנדרש.

ט' $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$

<u>הוכחה</u>

נניח ש- $A \subseteq B$ ו- $y \in f(A)$. אזי קיים $x \in A$ כך ש-$y = f(x)$. אז מתקיים גם $x \in B$ ולכן $y = f(x) \in f(B)$ ∎

י' $C \subseteq D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

<u>הוכחה</u>

נניח ש- $C \subseteq D$ ו- $x \in f^{-1}(C)$. אזי $f(x) \in C$ ולכן $f(x) \in D$.

אזי $x \in f^{-1}(D)$ ∎

כ' $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

<u>הוכחה</u>

$$y \in f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha : y = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\exists \alpha \in I : \exists x \in A_\alpha : y = f(x) \Leftrightarrow \exists \alpha \in I : y \in f(A_\alpha) \Leftrightarrow$$
$$y \in \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

מש"ל.

ל' $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

$$y \in f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha : y = f(x) \Rightarrow$$
$$\exists x \in X : \forall \alpha \in I : x \in A_\alpha \wedge y = f(x) \Rightarrow$$
$$: \forall \alpha \in I : y \in f(A_\alpha) \Rightarrow y \in \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

מש"ל.

מ' $f^{-1}(\cap_{\alpha\in I} C_\alpha) = \cap_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$

<u>הוכחה</u>

$$x \in f^{-1}(\cap_{\alpha\in I} C_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \cap_{\alpha\in I} C_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in I: f(x) \in C_\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\alpha \in I: x \in f^{-1}(C_\alpha) \Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$$

מש"ל.

נ' $f^{-1}(\cup_{\alpha\in I} C_\alpha) = \cup_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$

<u>הוכחה</u>

$$x \in f^{-1}(\cup_{\alpha\in I} C_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \cup_{\alpha\in I} C_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha \in I: f(x) \in C_\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha \in I: x \in f^{-1}(C_\alpha) \Leftrightarrow x \in \cup_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$$

מש"ל.

5. יהיה (M,d) מרחב מטרי הוכיחו ש-

א' לכל $x,y,z \in M$ מתקיים: $|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$

<u>הוכחה.</u> לפי אי שיוויון המשולש: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

ולכן (יחד עם סימטריות של d) מקבלים:

$d(x,y) - d(y,z) = d(x,y) - d(z,y) \le d(x,z)$ (5.1) .

באותה לוגיקה מ- $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z)$ נובע:

$d(y,z) - d(x,y) \le d(x,z)$ (5.2).

מ-(5.1) ו-(5.2) מקבלים: $|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$, מש"ל.

ב' לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ מתקיים:

$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$.

<u>הוכחה.</u>

<u>הוכחה באינדוקציה</u> (האינדוקציה לפי n)

<u>בסיס האינדוקציה</u>. אם $n = 3$ הטעינה נכונה לפי אישוויון המשולש.

<u>צעד האינדוקציה.</u> תהי הטעינה נכונה כאשר $n = k$, ז"א:

$d(x_1,x_k) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{k-1},x_k)$. אזי

$$d(x_1,x_{k+1}) \le d(x_1,x_k) + d(x_k,x_{k+1})$$
$$\le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{k-1},x_k) + d(x_k,x_{k+1})$$

ז.א., הטעינה נכונה גם כאשר $n = k + 1$. ■

6. <u>הגדרה.</u> יהיה M מרחב מטרי. הסדרה $x_n \in M$ נקראת *קבועה לבסוף* אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ וקיים $a \in M$ כך ש- $n \ge n_0 \Rightarrow x_n = a$.

א' הוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

<u>הוכחה.</u>

תהי x_n סדרה קבועה לבסוף. אזי קיימים $a \in M$ ו- $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \ge n_0 \Rightarrow x_n = a$. יהיה $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$. אז : $n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$.

לכן לפי הגדרת גבול הסדרה: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ■

ב' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x וקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $x_m \neq x_n$ מתקיים $d(x_m, x_n) \ge \varepsilon_0$. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

<u>הוכחה.</u>

נוכיח שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \ge n_0 \Rightarrow x_n = x$. מכיוון ש- $x_n \to x$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \ge n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \frac{\varepsilon_0}{2})$. מזה נובע שאם ניקח שני מספרים טבעיים $m, k \ge n_0$, אז $d(x_m, x_k) \le d(x_m, x) + d(x, x_k) < \varepsilon_0$. לו היה $x_m \neq x_k$ אז לפי התנאי היה $d(x_m, x_k) \ge \varepsilon_0$. לכן לכל $m, k \ge n_0$ מתקיים $x_m = x_k$ ■

ג' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x. תהי $\{x_n\} \subseteq M$ תת קבוצה סופית. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

<u>הוכחה.</u> נסמן את הקבוצה $\{x_n\}$ ב- A. נסתכל בקבוצה $K = \{a \in A | d(a,x) > 0\}$.

אם $K = \emptyset$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$ $x_n = a$, והכול הוכח.

אם $K \neq \emptyset$ נסמן ב-ε את המספר $\min_{a \in K} \{d(a,x)\}$.

אזי (מההתכנסות) קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \ge n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon)$. אזי $n \ge n_0 \Rightarrow x_n \notin K \Rightarrow d(x_n, x) = 0 \Rightarrow x_n = x$. מש"ל.

7. <u>*תזכורת*</u>. הפונקציה $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$\rho(x,y)=|x-y|$ היא מטריקה על $\mathbb{R}$.

יהיה M מרחב מטרי ו- $a\in M$. נגדיר פונקציה $f:(M,d)\to(\mathbb{R},\rho)$ כך שלכל $x\in M$: $f(x)=d(x,a)$. הוכיחו ש- f רציפה.

<u>הוכחה.</u> נוכיח ש-f רציפה בכל נקודה וזה (לפי ההרצאה) יוכיח רציפות של הפונקציה.
נניח ש-$x\in M$ ו- $x_n\to x$. לפי קריטריון התכנסות הסדרות שהיה בהרצאה, זה גורר: $d(x_n,x)\to 0$. מאי שיוויון המשולש נובע (ראה שאלה 5ב') ש- $|d(x_n,a)-d(x\,,a)|\le d(x_n,x)$. אבל לפי תכונות הסדרות המתכנסות ב-$\mathbb{R}$ (הידועות מקורסים קודמים),זה אומר ש- $|d(x_n,a)-d(x\,,a)|\to 0$.
ומזה נובעה ש-

$$\rho\big(f(x_n),f(x)\big)=|f(x_n)-f(x)|=|d(x_n,a)-d(x\,,a)|\to 0\,.$$

. לפי אותו קריטריון ההתכנסות קיבלנו: $f(x_n)\to f(x)$ במטריקה ρ.
ז"א: $x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to f(x)$.
מזה נובעה (ההרצאה) ש-f רציפה בנקודה x. מש"ל.