סיכום תרגיל כיתה 11

<u>תזכורת</u>

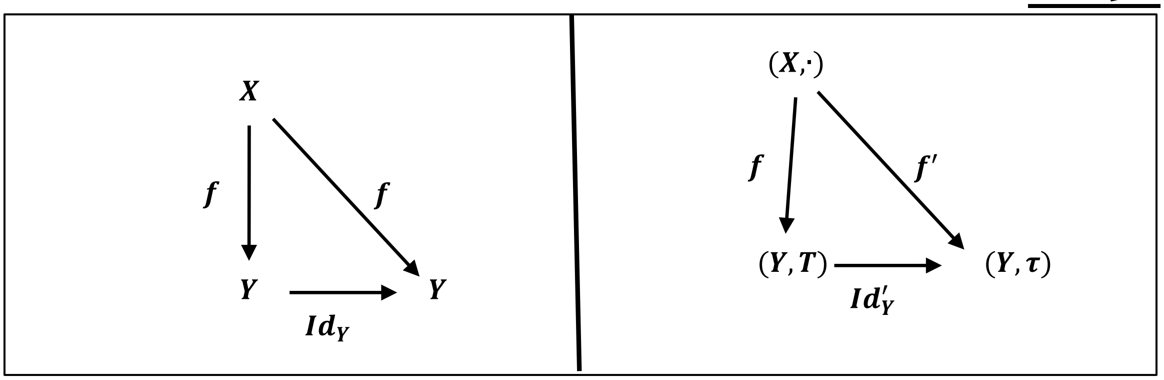
יהיו X,Y מ"ט. העתקה $f: X \to Y$ נקראת *העתקת מנה* עם היא:

א) העתקת על

ב) מקיימת תנאי הבא:

$$U \text{ פתוחה במ''ט } Y$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{-1}(U) \text{ פתוחה במ''ט } X$$

<u>בעיה 1</u>



<u>בלי טופולוגיות</u>. נניח ש-$f: X \to Y$ העתקה על Y. אז אפשר לבדוק (איבר- איבר) שדיאגרמה משמאל קומוטטיבית .

<u>עם טופולוגיות</u>. הטופולוגיה ב-X <u>משרה</u> (באופן חד משמעי) טופולוגיה (T) על Y שהופכת את f להעתקת מנה:

$$f^{-1}(U) \text{ פתוחה במ''ט } X \Leftrightarrow U \in T.$$

באופן כללי על הקבוצה Y יכולות להיות גם טופולוגיות אחרות.

השאלה היא, איזו טופולוגיה תהפוך את f להיות רציפה?

כדי לענות על השאלה הזאת אנחנו <u>בדיאגרמה מימין</u> נוסיף טופולוגיות ונשנה שמות הפונקציות f ו-Id למרות שערך של הפונקציות על כל $x \in X$ נשאר אותו דבר:

$$f(x) = f'(x), Id_Y'(x) = Id_Y(x) = x.$$

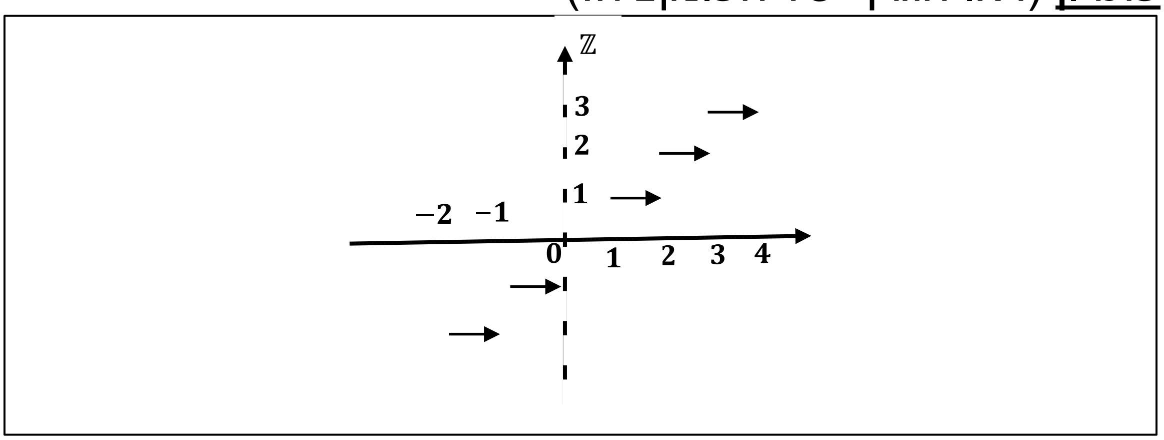
<u>הוכיחו</u> שטופולוגיה T היא טופולוגיה חזקה ביותר מאלה שהופכות f' לפונקציה רציפה. במילים אחרות, f' רציפה אם"ם $\tau \subseteq T$.

<u>הוכחה</u>
נתבונן בדיאגרמה מימין. לפי אחד מהמשפטים:
f' רציפה אם"ם Id'_Y רציפה (ההרצאה).
אבל Id'_Y רציפה אם"ם $(U \in \tau \Rightarrow {Id'}_Y^{-1}(U) = U \in T)$
אם"ם $\tau \subseteq T$, מש"ל.

<u>בעיה *2*</u>

נביט ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הרגילה ובפונקציית הערך השלם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ (כלומר עבור $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ מוגדר להיות השלם המקסימלי n המקיים $n \leq x$).
נסמן ב-T את הטופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שעבורה f היא העתקת מנה .
<u>הראו</u> ש- $T = \{\varnothing, \mathbb{Z}\} \cup \{(-\infty, m] \cap \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

<u>פתרון</u> (ראו הגרף של הפונקציה:)



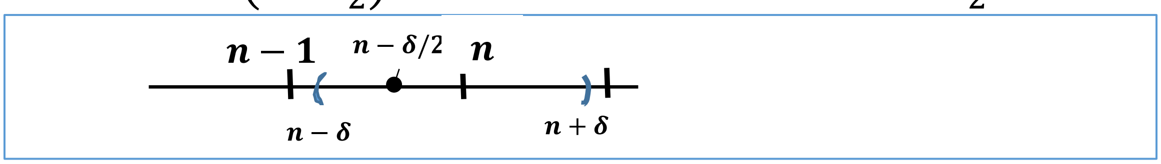
כיוון 1. $\supseteq$. נוכיח שכל איבר מימין שייך לטופולוגית T. ברור שקבוצה ריקה ו-$\mathbb{Z}$ עצמה שייחות ל-T.

תהי $V = (-\infty, m] \cap \mathbb{Z}$. אזי

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\big((-\infty, m] \cap \mathbb{Z}\big) = \{x \in \mathbb{R} | x < m+1\} = (-\infty, m+1)$$

כלומר הקבוצה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ולכן (לפי הגדרה של T) שייכת ל-T.

כיוון 2. $\subseteq$. נניח $T \ni U \neq \emptyset$. נניח גם ש- $n \in U$. אזי $f(n) = n$.
מכיוון ש-f רציפה ב-n קיים $0 < \delta < 1$ כך ש- $f((n-\delta, n+\delta)) \subseteq U$. אז בפרט: $n - \frac{\delta}{2} \in (n-\delta, n+\delta)$ ולכן $n - 1 < n - \frac{\delta}{2} < n$ שגורר $f\left(n - \frac{\delta}{2}\right) = n - 1$.



ז"א $n - 1 \in U$. כלומר, קיבלנו: $n \in U \Rightarrow n - 1 \in U$.
זה אומר שאם U לא חסומה מלעיל אז $U = \mathbb{Z}$. אחרת U מכילה מספר שלם מקסימלי m, כלומר $U = (-\infty, m] \cap \mathbb{Z}$, מש"ל.

בעיה 3

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט. יהיו $p_i: X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$ הטלות.

הוכיחו שהן העתקות מנה.

הוכחה

כל הטלה היא העתקה רציפה ופתוחה ועל X_i (ההרצאות) ולכן - העתקת מנה, מש"ל.

בעיה 4

תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ העתקה כך ש- $f\big((x,y)\big) = x - y$.

הוכיחו ש- f העתקת מנה.

הוכחה. ניזכר שההטלות $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הן פונקציות רציפות (הרצאות) כמו גם פונקציה קבועה $c_{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כאשר $c_{-1} \equiv -1$. לכון f רציפה כי $f\big((x,y)\big) = p_1\big((x,y)\big) + c_{-1}p_2((x,y))$ - סכום של פונקציה רציפה p_1 והמכפלה $c_{-1}p_2$ של רציפות (הרצאה). הצמצום $f|_{\mathbb{R}\times\{0\}}: \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ הומאומורפיזם (הוכחנו פעם) ולכן הוא העתקת מנה (ההרצאה). אזי - לפי המשפט על פונקציה רציפה שצמצומה הוא העתקת מנה - f העתקת מנה, מש"ל.

בעיה 5

יהיו:

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ \}$$
$$D^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

הוכיחו שהפונקציה $\varphi: S^2 \to D^1$ המוגדרת על ידי השוויון $\varphi\big((x,y,z)\big) = (x,y,0)$ היא העתקת מנה.

הוכחה

על. אם $(x_0, y_0, 0) \in D^1$ אז $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$ ואפשר לקחת $z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$. אזי $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ ו- $\varphi\big((x_0,y_0,z_0)\big) = (x_0, y_0, 0)$. לכן φ היא פונקצית על.

רציפות.

הפונקציה φ יכולה להיות מוצגת כצמצום של הפונקציה $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

כך ש- $\Phi\big((x,y,z)\big) = (x,y,0)$.

אולם את Φ אפשר להציג כ- $\Phi = (p_1, p_2, c_0)$ כאשר p_1, p_2 הטלות ולכן הן רציפות. הפונקציה $c_0 = 0$ היא פונקציה קבועה ולכן רציפה. לפי המשפט מהרצאות Φ רציפה. זה גורר שגם צמצומה φ רציפה.

סגירות

הספרה S^2 קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית (משפט הינה - בורל). $D^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ מרחב הוסדורף. לכן φ סגורה.

מנה

בתור פונקציה על, רציפה וסגורה φ העתקת מנה, מש"ל.

בעיה 8

יהי X מ"ט. תהי U פתוחה ב-X ותהי A צפופה ב-X.

היכיחו

א' $U \subseteq \overline{A \cap U}$

הוכחה.

יהי $p \in U$ ותהי V_p סביבה כלשהי של p. אזי גם $U \cap V_p$ סביבה של p (חיתוך של שתי קבוצות פתוחות פתוח). לכן $U \cap V_p$ חותכת את הקבוצה A כי A צפופה. כלומר : $V_p \cap U \cap A \neq \emptyset$,

ואפשר להגיד שכל סביבה של p חותכת את $U \cap A$.

לכן $p \in \overline{A \cap U}$. *אז קיבלנו:* $p \in U \Rightarrow p \in \overline{A \cap U}$, *או* במילים אחרות $U \subseteq \overline{A \cap U}$, *מש"ל.*

ב' $\overline{U} = \overline{A \cap U}$

הוכחה . א' גורר: $\overline{U} \subseteq \overline{\overline{A \cap U}} = \overline{A \cap U}$ (תכונות של סגור).

מצד אחר: $A \cap U \subseteq U \Rightarrow \overline{A \cap U} \subseteq \overline{U}$ (תכונות של סגור).

שתי ההכלות גוררות את השוויון הנדרש.

בעיה 9

יהי (M, d) מ"מ.

א' הוכיחו ש- $d: M \times M \to \mathbb{R}$ רציפה.

הערה 1. הסימון $d((x, y))$ – ערך של פונקציה d בנקודה $(x, y) \in M \times M$ - והסימון $d(x, y)$ - מרחק בין הנקודות x, y - מסמנים אותו ערך.

הערה 2. טופולועיה ב-$M \times M$ היא טופולוגית המכפלה.

ב' יהי (M, d) קומפקטי.

הוכיחו שקיימים $x_0, y_0 \in M$ כך ש- $d(x_0, y_0) = \sup\limits_{x,y \in M} d(x, y)$.

הוכחת א'

לפי שהיה הוכח בהרצאות פונקציה רציפה אם"ם היא רציפה בכל נקודה. לכן מספיק להוכיח

נוכיח ש-$d: M \times M \to \mathbb{R}$ רציפה בנקודה (a, b), אבל קודם נסיק כמה מסקנות מאי-שוויון המשולש:

לכל 4 נקודות $x, y, a, b \in M$ מתקיים:

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b) \Rightarrow$$
$$d(x, y) - d(a, b) \leq d(x, a) + d(y, b)$$

אם להחליף מקומות בין x לבין a ובין y לבין b, נקבל:

$$d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, y) + d(y, b) \Rightarrow$$
$$d(a, b) - d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, b)$$

משני השוויונות:

$|d(x,y)-d(a,b)| \le d(x,a)+d(y,b)$. (*)

<u>עכשב נחזור להוכחת הרציפות d בנקודה (a,b):</u>

נסמן $r=d(a,b)$.

יהי $\varepsilon>0$. כדי להוכיח רציפות d בנקודה (a,b) אנחנו צריכים למצוא $U \subseteq M\times M$ פתוחה בטופולוגית המכפלה

כך ש-$U \ni (a,b)$ ו- $d(U)\subseteq(r-\varepsilon,r+\varepsilon)$.

ניקח $U=B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. הקבוצה הזאת פתוחה לפי העובדה שכדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ולפי הגדרת טופולוגית המכפלה.

מאי-שוויון (*) נקבל:

$$(x,y)\in B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)\Rightarrow |d(x,y)-r|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר: $(x,y)\in U\Rightarrow |d(x,y)-r|<\varepsilon$ או במלים אחרות:

$d(U)\subseteq(r-\varepsilon,r+\varepsilon)$, מש"ל

<u>הוכחת ב'</u>

$M\times M$ מ"ט קומפקטי כמכפלה של שני מ"ט קומפקטיים.

לכן $d(\ M\times M)$ קבוצה קומפקתית כתמונה של מרחב טופולוגי קומפקטי תחת פונקציה רציפה. לכן $d(\ M\times M)$ קבוצה חסומה וזה גורר- $\sup d(\ M\times M)<\infty$.

היא גם סגורה ב- $\mathbb{R}$ כקבוצה קומפקטית במ"ט האוסדורף.

ולכן $\overline{d(\ M\times M)}=d(\ M\times M)$.

ולבסוף, מזה נובע ש- $\underline{S:=\sup d(\ M\times M)\in d(\ M\times M)}$ (**)

כי (לפי הגדרת sup) לכל $\varepsilon>0$ הקטע $(S-\varepsilon,S+\varepsilon)$ חותך את $d(\ M\times M)$ ולכן S שייך לסגור.

(**) אומר שקיימים $x_0,y_0\in M$ כך ש-$d(x_0,y_0)=S$, מש"ל.