תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

1 ביוני 2022

חדוא

1. קרבו את $\sin(1)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

וידוע שהשיוויון מתקיים לכל x בפרט עבור $x=1$ ולכן

$$\sin(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

כעת, ניקח $k+1$ מחוברים ראשונים שיהוו את הקירוב ונראה איזה k צריך לקחת על מנת שהשגיאה לא תעלה על $\frac{1}{100}$.
במפורש: הקירוב שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

והשגיאה תהיה

$$\sin(1)-\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

נחסום את השגיאה: לפי לייבניץ (כיוון ש $\frac{1}{(2n+1)!}$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס ומתסכלים על הטור של סדרה זאת עם סימנים מתחלפים) מתקיים ש

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|\le\frac{1}{(2(k+1)+1)!}=\frac{1}{(2k+3)!}$$

נרצה ש $\frac{1}{100}\le\frac{1}{(2k+3)!}$. מספיק לקחת $k=1$ ואז הקירוב הוא

$$\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}$$

ולפי וולאפרם

$$\sin(1)-\frac{5}{6}=0.008137\ldots$$

(א) מה היה קורה אם היינו רוצים שגיאה לכל היותר של $\frac{1}{10000}$? כמו מקודם חסמנו את השגיאה ונרצה k עבורו

$$\frac{1}{(2k+3)!} \leq \frac{1}{10000}$$

מספיק לקחת $k = 3$ יספיק (הצבה במחשבון) ואז הקירוב יהיה

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040}$$

ולפי וולפרם

$$\sin(1) - \frac{4241}{5040} = 0.00000273\ldots$$

(ב) חישבנו קירוב ל $\sin(1)$. מה יהיה יותר קל לחשב קירוב ל $\sin(\frac{1}{2})$ או ל $\sin(2)$ בדרך בה הלכנו?ראינו ש

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

והשגיאה תהיה

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2)^{2n+1}, \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

ברור שהשגיאה עבור $\frac{1}{2}$ יותר קטנה ואז למשל:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (1)^{2n+1} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2)^{2n+1}$$

כיוון שראינו עבור $\sin(1)$ ש $k = 3$ יתן שגיאה קטנה מ $\frac{1}{10000}$ אז $k = 3$ יתן גם עבור $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ שגיאה קטנה מ $\frac{1}{10000}$. למה זה קורה מבחינה רעיונית? כי הטור שאנחנו מפתחים הוא סביב 0! ולכן ככל שיותר קרובים ל 0 הקירוב יותר טוב (במקרה שלנו).

2. הוכיחו ש $\left|\cos\left(\sqrt{2}\right) - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{100}$.
פתרון: בעצם מבקשים להראות ש $\frac{1}{6}$ הוא קירוב של $\cos\left(\sqrt{2}\right)$ עם שגיאה שחסומה על ידי $\frac{1}{100}$.
נתחיל בטור טילור של $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ולכן (השיוויון נכון לכל x בפרט עבור $x = \sqrt{2}$)

$$\cos\left(\sqrt{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^n = 1 - \frac{2^1}{2!} + \frac{2^2}{4!} - \frac{2^3}{6!} + \cdots$$

האיברים האדומים שתחילת הטור שווים ל $\frac{1}{6}$ כלומר $\frac{1}{6}$ מתקבלת כקירוב עם $k = 2$:

$$\frac{1}{6} = \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^n$$

ואז השגיאה היא

$$\cos\left(\sqrt{2}\right)-\frac{1}{6}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\cdot 2^{n}$$

נרצה להשתמש בלייביץ, לשם כך נראה ש

$$a_{n}=\frac{2^{n}}{(2n)!}$$

מונוטונית יורדת לאפס. נראה ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$ ואז $a_{n+1}\leq a_n$ ולכן היא מונוטונית יורדת (השאיפה לאפס נשאיר לתרגיל בחדו"א 1).

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n}}=\frac{2^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{2^{n}}=\frac{2}{(2n+1)\,(2n+2)}\leq\frac{2}{(1)\cdot(2)}=1$$

כמו שרצינו. נחזור לשגיאה ונחסום אותה:

$$\left|\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\cdot 2^{n}\right|\leq\frac{2^{3}}{6!}=\frac{1}{3\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{90}$$

לא הצלחנו לחסום את השגיאה ב $\frac{1}{100}$. יותר גרוע מזה, הוולפראם אומר שהתרגיל לא נכון (אז או שטעיתי בהעתקת התרגיל או שיש טעות במקור). בכל אופן, בוא נמצא אנחנו קירוב עם שגיאה לכל היותר $\frac{1}{100}$. כמו קודם, עם חישובים שעשינו, מחפשים k כך שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\cdot 2^{n}$$

יתן שהשגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ והשגיאה היא (וגם נחסום אותה)

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\cdot 2^{n}\right|\leq\frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}$$

נציב $k=3$

$$\frac{2^{4}}{8!}=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\leq\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{120}\leq\frac{1}{100}$$

והקירוב שמתקבל הוא

$$\cos\left(\sqrt{2}\right)\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\cdot 2^{n}=1-\frac{2^{1}}{2!}+\frac{2^{2}}{4!}-\frac{2^{3}}{6!}=\frac{7}{45}$$

3. קרבו את $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור מוכר

$$\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}$$

שיוויון זה נכון ל x שמקיימים $|x|<1$. לכן אפשר להציב $x=\frac{1}{2}$ ולקבל

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

ונחפש קירוב מהצורה

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

כך ש k יקיים שהשגיאה

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

קטנה מ $\frac{1}{100}$. כיוון שהשגיאה היא טור לייבניץ נוכל לחסום

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right|\le\frac{1}{(k+1)\cdot 2^{k+1}}$$

נציב $k=4$

$$\frac{1}{5\cdot 2^5}=\frac{1}{5\cdot 32}=\frac{1}{160}<\frac{1}{100}$$

ונקבל את הקירוב

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}=\frac{77}{192}$$

4. תרגיל 9 שאלה 3: חשבו את טור טיילור (סביב 0) של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.
פתרון:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left[(1-x)^{-1}\right]'=(-1)^2(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

נקבל

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{dt}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-0)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}-1$$

בנוסף,

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

ולכן

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x t^n\mathrm{dt}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ולכן

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{dt}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots$$

5. מועד א, 2019 בר אילן, שאלה 3א: חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\left(e^t\right)\mathrm{dt}}{\sin^2(x)}$$

פתרון: נראה שזה גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ ואז נשתמש בלופיטל. המכנה בודאי שואף לאפס ונראה שגם המונה: ידוע ש $\sin(e^t)$ פונקציה רציפה ולכן יש לה קדומה שנסמנה ב $F(t)$. כלומר

$$F'(t) = \sin(e^t)$$

בנוסף

$$\int_0^{x^2} \sin\left(e^t\right) \mathrm{dt} = F(x^2) - F(0)$$

ו

$$\lim_{x\to 0} F(x^2) - F(0) = F(0) - F(0) = 0$$

ולכן המונה אכן שואף לאפס (שימו לב ש F גזירה ולכן רציפה ובזה השתמשנו בשיוויון הראשון). אפשר גם לנמק שעושים אינטגרל של פונקציה רציפה על הקטע $[0, x^2]$ ששואף לאפס ולכן האינטגרל שואף לאפס.
כעת, נרצה להשתמש בלופיטל. גזירת המכנה היא קלה -

$$\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

השאלה היא מה הנגזרת של המונה?

$$\left(\int_0^{x^2} \sin\left(e^t\right) \mathrm{dt}\right)' = \left(F(x^2) - F(0)\right)' = F'(x^2) \cdot 2x = \sin\left(e^{\left(x^2\right)}\right) \cdot 2x$$

ואז נחזור לתרגיל ונחשב לפי לופיטל ש

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\left(e^t\right) \mathrm{dt}}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(e^{\left(x^2\right)}\right) \cdot 2x}{2\sin(x) \cdot \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin\left(e^{\left(x^2\right)}\right)}{\cos(x)} = 1 \cdot \frac{\sin(e)}{1}$$

1. תרגיל 6 שאלה 1: לכל אחד מערכי k, קבעו כמה פתרונות יש למערכת

$$\begin{cases} x+y+z & =k \\ kx+(2k-2)\,y+\left(k^2+k\right)z & =k^2 \\ -6x-(2+2k)\,y-\left(k^2+5k\right)z & =-5k-3 \end{cases}$$

פתרון: נייצג את המערכת במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ k & (2k-2) & \left(k^2+k\right) & k^2 \\ -6 & -(2+2k) & -\left(k^2+5k\right) & -5k-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+6R_1]{R_2-kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & (k-2) & k^2 & 0 \\ 0 & 4-2k & \left(-k^2-5k+6\right) & k-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & (k-2) & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(k^2-5k+6\right) & k-3 \end{array}\right)$$

במידה והאדומים שונים מאפס אז יש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נשאר לטפל במקרה שאחד האדומים שווה אפס, זה קורה במידה ו $k-2=0$ (כלומר $k=2$) או $k^2-5k+6=0$ (כלומר $k=2,3$. טרינום $k^2-5k+6=(k-3)\,(k-2)$).

עבור $k=2$ נקבל שורה שלישית שורת סתירה (המשוואה שמתקבלת בשורה השלישית היא $0=-1$) ולכן לא יהיה פתרון במקרה זה.

עבור $k=3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר, צורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (השלישי) ולכן יהיה אינסוף פתרונות. עד כאן התרגיל אבל אפשר להמשיך לראות מהם כל הפתרונות במקרה ש $k=3$. נעשה זאת על ידי דירוג קנוני:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן עבור $z=t$ נקבל $y=-9t$ ו $x=3+8t$ ולכן כל הפתרונות הם מהצורה

$$(3+8t,-9t,t)=t\,(8,-9,1)+(3,0,0)$$

(א) האם זהו מרחב וקטורי? לא! לא עובר בראשית הצירים. באופן כללי, אוסף פתרונות למערכת מהצורה

$$Ax=b$$

עבור $b\neq 0$ היא איננה מרחב וקטורי. למה? כי 0 לא אחד מהפתרונות שהרי

$$A0\neq b$$

בדוגמה שלנו זה אוסף הפתרונות למערכת

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

ו $b\neq 0$ ולכן זהו לא מרחב וקטורי.

(ב) אוסף פתרונות למערכת הומוגנית, מהצורה $Ax = 0$ היא כן מרחב וקטורי.
למה? דבר ראשון 0 הוא פתרון לכל מערכת הומגנית כי $A \cdot 0 = 0$.
דבר שני: חיבור של שני פתרונות גם הוא פתרון כי: אם v_1, v_2 פתרונות למערכת ההמוגנית $Ax = 0$ זה אומר ש $Av_1 = 0$ וגם $Av_2 = 0$ ואז החיבור שלהם גם פתרון למערכת כי

$$A\left(v_1 + v_2\right) = Av_1 + Av_2 = 0 + 0 = 0$$

דבר אחרון - תשתכנעו/תוכיחו שכל כפולה של פתרון למערכת הומוגונית גם הוא פתרון למערכת.