תרגיל 2

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a,b) | a,b \in N, a < b\}$
ב. $R_2 = \{(a,b) | a,b \in N, a \le b\}$
ג. $R_3 = \{(a,b) | a,b \in N, a = b\}$

2. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x-y| < 1 \Leftrightarrow xRy$
ב. $x-y < 1 \Leftrightarrow xSy$
ג. $x-y < -1 \Leftrightarrow xTy$

3. נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, ..., A_n$ נגדיר יחס R על A ע"י: $R = \{(x,y) :$ קיים i עבורו $x \in A_i$ וגם $y \in A_i\}$.
הוכח או הפרך:

א. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \Leftarrow R$ רפלקסיבי.
ב. R רפלקסיבי $\Leftarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.
ג. לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \varnothing \Leftarrow R$ רפלקסיבית.
ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \varnothing$.

4. יהיו $R \subseteq A \times B,\ \ V \subseteq A \times B,\ \ S \subseteq B \times C,\ \ W \subseteq B \times C,\ \ T \subseteq C \times B$
הוכח כי:

א. $(R \subseteq V) \wedge (S \subseteq W) \Rightarrow S \circ R \subseteq W \circ V$.
ב. $(S \cup W) \circ R = (S \circ R) \cup (W \circ R)$.
ג. הוכח ע"י דוגמא נגדית שהטענה $(S \cap W) \circ R = (S \circ R) \cap (W \circ R)$ אינה נכונה.

.5

א. נתונים היחסים:
$R=\{(1,2),(3,4),(2,2)\}, \quad S=\{(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)\}$.
חשב $R\circ S, S\circ R, (R\circ S^{-1})\circ R, (S^{-1}\circ R^{-1})\circ S$

ב. בשני הסעיפים הבאים בדוק האם היחס R על קבוצה A הוא יחס שקילות. אם כן, מצא את מחלקות השקילות:

i. $xRy \Leftrightarrow 3|(x+2y)$ $A=N$ (N המספרים הטבעיים)

ii. B קבוצה בעלת n איברים $n\geq 2$, ו- $A=P(B)$.
$xRy \Leftrightarrow (x\subseteq y)\vee(y\subseteq x)$.

6. יהי E יחס שקילות על קבוצה A, ויהי F יחס שקילות על קבוצה B. תהי $G=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2))\,|\,(a_1,a_2)\in E,(b_1,b_2)\in F\}$.
הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A\times B$.

7. A קבוצה.יהיו S ו-R יחסי שקילות על A. הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R\cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A\times A)\setminus R$ יחס שקילות.

ג. $(A\times A)\setminus R\cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R\setminus S$ יחס שקילות.

ה. $R\circ R$ יחס שקילות.

ו. $R\circ S$ יחס שקילות.

(I_A זהו יחס הזהות, לדוגמא אם $A=\{1,2,3\}$ אז $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$)

8. יהי R היחס הבא על $Z\setminus\{0\}$ (קבוצת המספרים השלמים ללא האפס):
aRb אם ורק אם a מחלק את b.

א. הוכח שהיחס aRb הוא סדר חלקי על N (קבוצת המספרים הטבעיים).

ב. הוכח שהיחס R הוא סדר מלא על $\{2^k : k\in N\}$.

9. יהי R היחס הבא על $N\times N$: $(a,b)R(c,d)$ אם ורק אם $a\leq c\wedge b\geq d$.

א. הוכח ש R סדר חלקי שאינו מלא.