תרגיל בית מספר 4 – ליניארית מדמ"ח

<u>שאלה 1:</u> (חזרה קטנה אחורה, על מנת לחדד סופית את הנקודה)

תהי $T:V\to W$ העל ויהיו $\{v_1,\dots,v_n\}$ ווקטורים ב- V. הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע ו- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בת"ל

ב. אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בת"ל

ג. אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס עבור V ו- $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בסיס עבור W אזי T היא אזומורפיזם.

<u>שאלה 2</u> :

תהיינה $T:V\to W,\ S:W\to U$ העתקות ליניאריות.

א. הוכיחו כי $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$

ב. נניח בנוסף ש- $S\circ T$ היא העתקת האפס. הוכיחו כי $\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(S)$

<u>שאלה 3:</u>

יהי V מ"ו ותהי $T:V\to V$ העל המקיימת $T^2=T\circ T=0$. הוכיחו כי $\dim\ker(T)\geq\frac{\dim V}{2}$.

<u>שאלה 4:</u>

יהי V מרחב ווקטורי מעל F ותהי $T:V\to V$ העל המקיימת $T^3=0$. נתון בנוסף שקיים ווקטור $0\neq v\in V$ כך ש- $T^2(v)\neq 0$.

א. הוכיחו שההעתקה $(I-T)$ היא איזומורפיזם ומצאו את $(I-T)^{-1}$.

ב. הוכיחו כי הקבוצה $\{v,T(v),T^2(v)\}$ היא בת"ל.

רמז לסעיף א': $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

<u>שאלה 5:</u>

יהי $V=\{a\cos\theta+b\sin\theta : a,b\in\mathbb{R}\}$ מרחב ווקטורי (שאיבריו הן פונקציות של θ). הוכיחו או הפריכו: $V\cong\mathbb{R}^2$.

(שימו לב שאם בחרתם להוכיח את הטענה, עליכם להציג איזומורפיזם <u>ולהוכיח שהוא אכן</u> איזומורפיזם)

בהצלחה!