תירגול 11

13 ביוני 2016

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subset V$ תת מרחב מאותו מימד $(dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n)$. הוכח: $W = V$.

הוכחה: נבחר $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B) = W$ ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B) = V$. (B פורשת את V)■

תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v \in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.

פתרון: כיוון ש $span(B) = V$ ניתן לכתוב $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ נניח כי ניתן להציג את v גם כ $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ אזי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ כלומר $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i - \beta_i = 0$ כלומר לכל i $\alpha_i = \beta_i$ ■

4 המרחביים היסודיים של מטריצה

תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי 4 המרחבים היסודיים של A הם:

1. מרחב העמודות $C(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} = span\{C_1(A), \ldots, C_n(A)\} \subset \mathbb{F}^m$
2. מרחב השורות $C(A^t) = R(A) := \{A^t x \mid x \in \mathbb{F}^m\} = span\{R_1(A), \ldots, R_n(A)\} \subset \mathbb{F}^n$
3. מרחב האפס $N(A) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n$

מרחב השורות

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
הוכח $R(A) = R(U)$.

הוכחה: (להסביר את הגדרת מרחב השורות ומה זה להיות במרחב השורות וכן תכונת שחלוף של כפל מטריצות)
$(\supseteq)$ יהא $U^t x \in R(U)$
אזי $U^t x = (EA)^t x = A^t E^t x = A^t(E^t x) = A^t y \in R(A)$.
$(\subseteq)$יהא $A^t x \in R(A)$
אזי $A^t x = (E^{-1}U)^t x = (U^t(E^{-1})^t)x = U^t[(E^t)^{-1}x] = U^t y \in R(U)$. ■

מסקנה: בפרט אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת/קנונית.

תרגיל/דוגמא: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ מצא את $R(A)$.

פתרון: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

כיוון שמרחב השורות של A שווה למרחב השורות לאחר דירוג נקבל ש

$$R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \\ 4a+b \end{pmatrix}\}$$

מרחב העמודות

את מרחב העמודות ניתן למצוא כמו את מרחב השורות ע"י מעבר ל A^t. נראה עוד דרך:

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונניח שאחר דירוג העמודות $1, \cdots, l$ הן עמודות עם ציר. הוכח $\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$ בסיס למרחב העמודות.

פתרון: נסמן $EA = U$. כאשר U הצורה המדורגת של A ו $A = E^{'}U$ כאשר $E^{-1} = E^{'}$

בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A) = 0$ אבל $C_i(A) = E^{'} C_i(U)$ ולכן

$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i E^{'} C_i(U) = 0$ ע"י הכפלה בהופכית של $E^{'}$ נקבל $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U) = 0$

ולכן $\alpha_i = 0$ לכל i כי עמודות עם ציר הן בת"ל.

פורשת: מ"ל שלכל $l < s \leq n$

מתקיים $C_s(A) \in span\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$. (לפי תרגיל מש.ב.)

ברור כי $C_s(U) \in span\{C_1(U), \cdots C_l(U)\}$

בנוסף $C_i(U) = EC_i(A)$ ולכן אם $C_s(U) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U)$ אזי $EC_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i EC_i(A)$

ולכן ע"י הכפלה בהופכית נקבל $C_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A)$.■

הערות:

1. התרגיל נכון גם אם עמודות הצירים הן אינן העמודות הראשונות דווקא.
2. מרחב העמודות של U אינו שווה למרחב העמודות של A.

דוגמא: מצא את מרחב העמודות של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב העמודות הוא

$$span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

($\neq span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$)