תרגול 6

14 באפריל 2016

הגדרה: תת מרחב וקטורי: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב וקטורי אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V

הערה: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ מספיק לבדוק:
1. סגירות ביחס לחיבור.
2. איבר ניטרלי נמצא ב־W.
3. סגירות כלפי פעולת כפל בסקלר $\forall\alpha \in \mathbb{F}, \forall\omega \in W,\ \alpha\omega \in W$

שאר האקסיומות מתקימות כי W היא מתת קבוצה של V וב־V מתקיימות כל האקסיומות של מרחב וקטורי.

ואפשר לרכז את כל הבדיקות:
1. $0 \in W$.
2. $\forall\omega, v \in W,\ \alpha \in \mathbb{F}:\ \alpha\omega + v \in W$.

דוגמאות: $V, \{0\}$ תמיד תתי מרחבים של V. נקראים התתי מרחבים הטריוויאלים.

א. במישור האוקלידי $V = \mathbb{R}^2$ מעל השדה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

1. $W = \{(x, y) \mid x = 3y\}$ זהו ישר העובר דרך האפס העל שיפוע $\frac{1}{3}$.

זהו מרחב וקטורי, נוכיח ע"י בדיקה מלאה:
1. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ אזי מתקיים $x_1 = 3y_1, x_2 = 3y_2$ ולכן מתקיים $x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2)$ ולכן $x_1 + x_2 \in W$.
2. $0 = 3 \cdot 0$ ולכן $(0, 0) \in W$.
3. כפל בסקלר: יהיו $\alpha \in \mathbb{R}$ $(x_1, y_1) \in W$, מתקיים $x_1 = 3y_1$ ולכן גם $\alpha x_1 = \alpha \cdot 3y_1 = 3\alpha y_1$ ולכן $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in W$.

לכן W מ"ו בפני עצמו והוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$.

2. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ויהא $W = \{(a, b) \mid \exists(x, y):\ A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\} = \{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$.

Wכן תת מרחב. נוכיח ע"י בדיקה מקוצרת: (הוקטורים נמצאים ב־$\mathbb{R}^2 \ni A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)

1. $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן $0 \in W$

2. יהיו $w=A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, v=A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in W, \alpha\in\mathbb{R}$ אזי

$w+\alpha v=A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\alpha A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=A\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}x_1+\alpha x_2\\y_1+\alpha y_2\end{pmatrix}\in W$.

ולכן: $w+\alpha v\in W$.

הערה: Wכמרחב וקטורי בפני עצמו נקרא מרחב העמודות של A. ($A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}= \overrightarrow{a_1}x+\overrightarrow{a_2}y$)

3. $W=\{(x,y)\,|\,x,y\geq 0 \text{ or } x,y\leq 0\}$ הרביע החיובי והשלילי אינו תת מרחב כי $\underset{\in W}{(2,4)}+\underset{\in W}{(-3,-3)}=(-1,1)\notin W$

ב. $V=\mathbb{R}^3$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

1. $W=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0\}$ תת מרחב וקטורי של V (זהו מישור העובר דרך ראשית הצירים):

$\alpha 0+\beta 0+\gamma 0=0$ ולכן $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$.

יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$ $a\in\mathbb{R}$ אזי מתקיים $\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1=0, \alpha x_2+\beta y_2+\gamma z_2=0$ ולכן $0=a(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+(\alpha x_2+\beta y_2+\gamma z_2)=\alpha(ax_1+x_2)+\beta(ay_1+y_2)+\gamma(az_1+z_2)$ ולכן $\begin{pmatrix}ax_1+x_2\\ay_1+y_2\\az_1+z_2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$.

ג.מרחב המטריצות המרוכבות מגודל 2×2. $\mathbb{C}^{2\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$

1. המטריצות מסוג $W=\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}|a\in\mathbb{C}\}$ הן תת מרחב. נוכיח :

(ברור ש $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$). כעת יהיו $\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$ $\alpha\in\mathbb{C},$

אזי $\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\alpha b&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$

2. (אם יש זמן:המטריצות הסימטריות $W=\{A\in V\,|\,A^t=A\}$ הן תת מרחב:

ברור כי $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ מטריצה סימטרית ולכן: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$

יהיו A,B מטריצות סימטריות $\alpha\in\mathbb{C}$: ראינו בתרגיל קודם כי חיבור וכפל בסקלר שומרים על מטריצה הסימטרית. ולכן מתקיים

$$\alpha A+B\in W$$

)

חיתוך תתי מרחבים

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים. אזי
חיתוך תתי המרחבים $W \cap U := \{v \in V : v \in W \wedge v \in U\}$ הינו תת מרחב

הוכחה: יהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים, יהיו $\alpha \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in W \cap U$
אזי:

1. $0 \in U$ וגם $0 \in W$ ולכן $0 \in W \cap U$
2.

$$\begin{array}{ccc} v_1, v_2 \in W & and & v_1, v_2 \in U \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha v_1 + v_2 \in W & & \alpha v_1 + v_2 \in U \\ & \Downarrow & \\ \alpha v_1 + v_2 & \in & W \cap U \end{array}$$

דוגמאות:

1. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. יהיו $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0\}$

ו - $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x + y + 2z = 0\}$

$$W \cap U =$$
$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \wedge -x + y + 2z = 0\} =$$
$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = -x + y + 2z \wedge x + y + z = 0\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x = z \wedge x + y + z = 0\} = (x = t)$$
$$\{\begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

זה בעצם ישר העובר דרך ראשית הצרים במרחב $\mathbb{R}^3$ כי חיתוך אמיתי של שני ישרים הוא ישר.

2. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. יהיו $W = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$

ו־ $U=\{\beta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}:\beta\in\mathbb{R}\}$ אזי

$$W\cap U=$$
$$\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\mid\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix},\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{0\}$$

3. (אם יש זמן: $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$. יהיו Wתת מרחב של המטריצות הסימטריות ו U תת המרחב של המטריצות האנטי סימטריות אזי:
$W\cap U=\{A:A^t=A\wedge A^t=-A\}=\{0\}$)

צירופים לינארית ותלות לינארית

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\dots,v_n\in V$ ו $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל).

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

אזי $\pi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי.

הערה: אם ניקח כל $\alpha_i=0$נקבל $0v_1+0v_2+\cdots0v_n=0$. צ"ל זה נקרא טרוויאלי.

הגדרה: בסימונים הקודמים אם קיים צ"ל כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ ו־ $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ לא כולם אפס (צ"ל לא טריוויאלי) אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ תלויה לינארית (ת"ל).
אחרת, אם הצ"ל היחידי ששווה ל־ 0 הוא הצרוף לינארי הטריוויאלי, אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ בלתי תלויה לינארית (בת"ל).

(במילים אחרות אם $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ גורר שכל $\alpha_i=0$ אזי $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ קבוצה בת"ל)

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$

בת"ל

כי $0=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

פירושו $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ שזה גורר $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0$.

2. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

נתבונן ב $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

ונמיר אותו להצגה מטריצית $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (לפי מה שלמדנו באלגברת מטריצות כפל

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = b_1\vec{a_1} + b_2\vec{a_2} + \cdots + b_n\vec{a_n}$$)

כעת השאלה שקולה האם יש פתרון לא טריאלי למערכת. נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $z = t$ ונקבל $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון לא טרוויאלי. כלומר הוקטורים הנ"ל ת"ל.

3. יהי $V \in v \neq 0$ אזי $\{v\}$קבוצה בת"ל.

4. יהי $S = \{v_1 \dots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.

5. (אם יש זמן: $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.
תהא $S = \{2 + 6x, x^2, 1 + 2x + 2x^2\}$.
האם $1 + x + x^2$ הוא צ"ל של איברי S?
פתרון: צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1(2 + 6x) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$
כלומר לפי השוואת מקדמים : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1,\ 6\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$
ובצורה מטריצית $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

כלומר $-0.5(2 + 6x) + (-3)x^2 + 2(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$)

תרגיל יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל. הוכח $S' = \{v_1, w_2, \dots w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i = v_i + v_1$.
פתרון: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = 0$ צ"ל $\alpha_i = 0$.

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \cdots \alpha_n(v_1 + v_n)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$$

כיוון ש $S = \{v_1, \dots v_n\}$ בת"ל גורר ש $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) = 0,\ \alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0$

$\Leftarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0 \Leftarrow$ $S^{'}$ בת"ל.