בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ב, מועד א'

31.8.2022, ד' אלול התשפ"ב

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר
מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הדר קנר, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A \subseteq B$ אז $A \triangle C \subseteq B \triangle C$.

(ב) אם $A \in B$ אז $P(A) \in P(B)$.

(ג) מתקיים $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

2. (16 נק')

(א) לכל n טבעי נגדיר יחס T_n על $P(\{1, \ldots, n\})$ כך

$$T_n = \{(A, B) \mid n \in A \cap B\}$$

הוכיחו כי $|T_n| = 4^{n-1}$.

(ב) לכל n טבעי נגדיר יחס S_n על $P(\{1, \ldots, n\})$ כך

$$S_n = \{(A, B) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|S_n| = 4^n - 3^n$.

3. (21 נק') נסמן $X = P(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$. נגדיר על $X^{\mathbb{N}}$ את היחס

$$fRg \iff \forall n : f(n) \subseteq g(n)$$

(א) הוכיחו ש R הוא יחס סדר על $X^{\mathbb{N}}$.

(ב) מצאו את עוצמת קבוצת האיברים המקסימאליים ב $X^{\mathbb{N}}$ ביחס ל R. קבעו אם העוצמה סופית (אם כן, מה גודל הקבוצה), $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת. נמקו תשובתכם.

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת האיברים המינימאליים ב $X^{\mathbb{N}}$ ביחס ל R. קבעו אם העוצמה סופית (אם כן, מה גודל הקבוצה), $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת. נמקו תשובתכם.

4. (28 נק') נגדיר

$$X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\}$$

להיות כל תתי הקבוצות בנות המנייה של $\mathbb{R}$. נתבונן בקס"ח $(X, \subseteq)$.

(א) הוכיחו שבקס"ח זה אין איברים מקסימאליים.

(ב) הוכיחו שקיימת קבוצה של קבוצות $S \subseteq X$ כך שהקבוצה $\cup_{B \in S} B$ אינה שייכת ל X.

(ג) הוכיחו שקיימת קבוצה של קבוצות $S \subseteq X$ שהיא **שרשרת** כך שהקבוצה $\cup_{B \in S} B$ אינה שייכת ל X.

(ד) תהא $S \subseteq X$ שרשרת מקסימאלית ביחס להכלה. הוכיחו $\aleph_0 < |S|$.

5. (24 נק') תהיינה A, B קבוצות לא ריקות. לכל פונקציה $f : A \to B$, נגדיר יחס R_f על $P(B)$ כך

$$R_f = \left\{(B_1, B_2) \mid f^{-1}[B_1] = f^{-1}[B_2]\right\}$$

זהו יחס שקילות, אין צורך להוכיח.

(א) יהא $b_0 \in B$ ונגדיר את הפונקציה הקבועה על b_0 להיות הפונקציה $f : A \to B$ המוגדרת על ידי הכלל $f(x) = b_0$.
מצאו את עוצמת קבוצת המנה, כלומר את $|{}^{P(B)}/_{R_f}|$.

(ב) נסמן את קבוצת כל יחסי השקילות על $P(B)$ ב X ונגדיר פונקציה $g : B^A \to X$ על ידי הכלל $g(f) = R_f$.
הוכיחו/הפריכו: g פונקציה חח"ע.